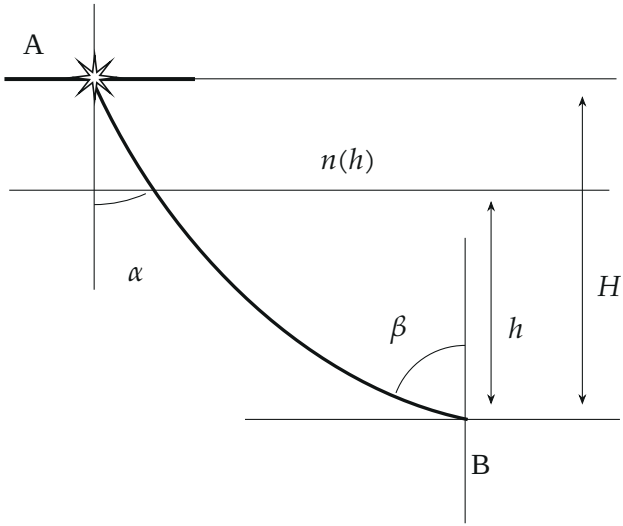
Луч вдоль провисающей верёвки

Задача 5. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 11 класс, задача 5] Гибкая массивная верёвка подвешена к потолку в точке A и закреплена в точке B, находящейся на H ниже точки A. Известно, что угол между верёвкой и вертикалью в точке A равен α, в точке B — β (см. рис.). В точке A находится точечный источник света. Как должен зависеть от высоты h над точкой B показатель преломления воздуха $n(h)$, чтобы один из лучей источника, преломляясь в воздухе, распространялся вдоль верёвки до точки B? Показатель преломления на высоте точки B равен n_0.

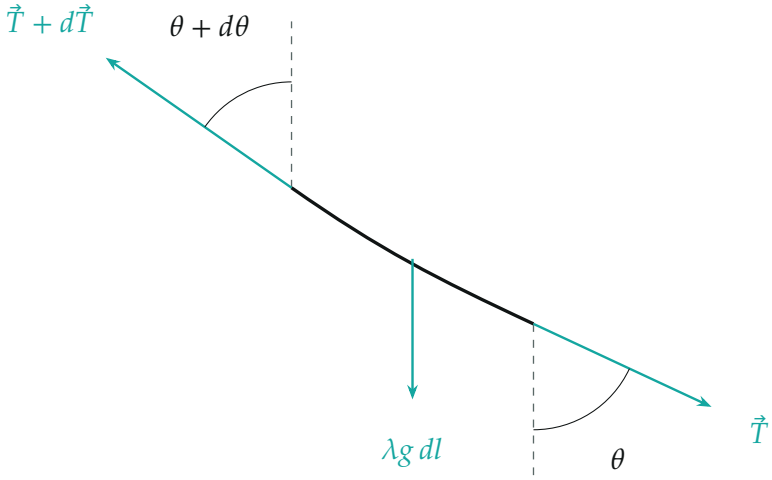


▲ **Решение. Что происходит.** У верёвки и у луча один и тот же закон. Для провисающей верёвки горизонтальная составляющая силы натяжения везде одна и та же: $T\sin\theta = \text{const}$, где θ — угол между верёвкой и вертикалью. Для луча в среде, где n зависит только от высоты, закон преломления тоже даёт $n\sin\theta = \text{const}$. Луч идёт вдоль верёвки, угол θ у них один, значит, n пропорционален T. А натяжение верёвки линейно растёт с высотой: $T(h) = T_B + \lambda g h$. Следовательно, $n(h)$ — линейная функция, и остаётся найти её по значениям в точках A и B. Класс задачи — аналогия: механика верёвки и оптика луча описываются одним уравнением.

Обозначения. λ — масса единицы длины верёвки; h — высота над точкой B; $\theta(h)$ — угол между верёвкой и вертикалью на высоте h ($\theta(0) = \beta$, $\theta(H) = \alpha$); $T(h)$ — сила натяжения верёвки на высоте h; $n_A = n(H)$, $n_0 = n(0)$.

1. Горизонтальная составляющая натяжения постоянна. Рассмотрим малый кусок верёвки длиной dl. Он в равновесии. На него действуют сила натяжения $\vec{T}$ от нижней части (вдоль верёвки вниз), сила натяжения $\vec{T} + d\vec{T}$ от верхней части (вдоль верёвки вверх) и вес $\lambda g\, dl$ — вертикальный. Горизонтальных внешних сил нет, поэтому горизонтальные составляющие натяжений на концах куска равны, т. е. величина $T \sin\theta$ не зависит от высоты:

$$T \sin\theta = T_x = \text{const}.$$



Малый кусок верёвки: натяжения на концах направлены по касательной, вес — вниз. Верхнее натяжение больше нижнего, а угол с вертикалью меньше: $d\theta < 0$, выше верёвка круче

2. Натяжение линейно растёт с высотой. Вертикальная составляющая натяжения на верхнем конце куска больше, чем на нижнем, на вес куска:

$$d(T \cos\theta) = \lambda g\, dl.$$

Горизонтальная составляющая постоянна, поэтому из $T^2 = T_x^2 + (T\cos\theta)^2$ следует

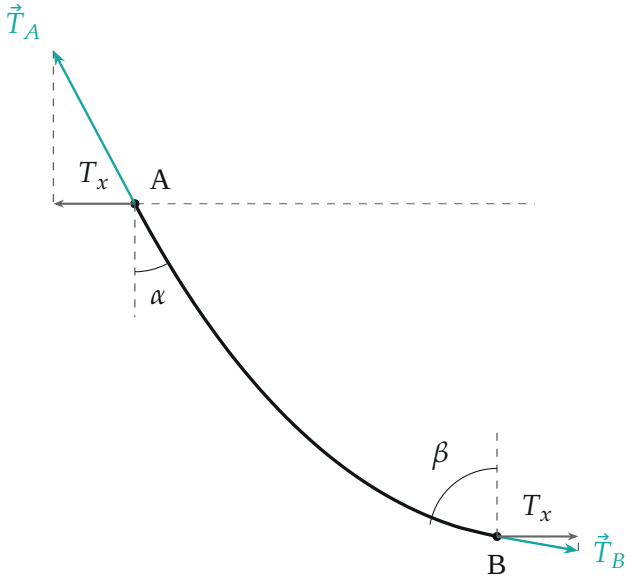
$$T\,dT = (T\cos\theta)\,d(T\cos\theta).$$

Подставим $d(T\cos\theta)$ и учтём, что $dl\cos\theta = dh$ — приращение высоты куска:

$$T\,dT = T\cos\theta\cdot\lambda g\,dl = T\lambda g\,dh \quad\Rightarrow\quad dT = \lambda g\,dh,$$

$$T(h) = T_B + \lambda g\,h.$$

Натяжение растёт на λg на каждый метр подъёма.



Верёвка в масштабе для $\alpha = 28°$, $\beta = 80°$: силы натяжения у концов направлены по касательной, у них одна и та же горизонтальная составляющая T_x, а $T_A - T_B = \lambda g H$

3. Луч вдоль верёвки. Разобьём воздух на тонкие горизонтальные слои с постоянным n внутри каждого; нормаль к слоям вертикальна, поэтому углы в законе преломления — это углы с вертикалью. Для каждой

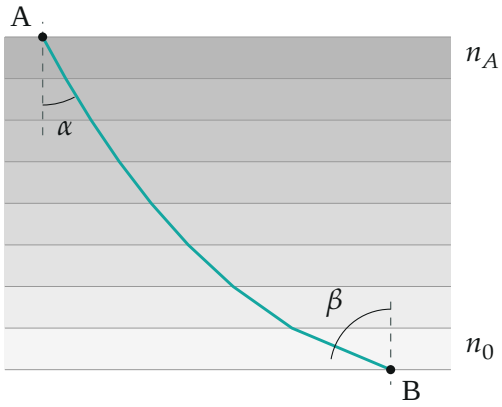
границы слоёв $n_i \sin\theta_i = n_{i+1}\sin\theta_{i+1}$, и по всей цепочке

$$n(h)\sin\theta(h) = \text{const} = n_0 \sin\beta.$$

Луч идёт вдоль верёвки, значит, его угол с вертикалью в каждой точке равен $\theta(h)$ из п. 1: $\sin\theta = T_B \sin\beta / T$. Подставим:

$$n(h) = \frac{n_0 \sin\beta}{\sin\theta(h)} = n_0 \frac{T(h)}{T_B} = n_0\left(1 + \frac{\lambda g}{T_B}h\right),$$

т. е. $n(h) = n_0 + Fh$ с некоторой постоянной F — показатель преломления линейно растёт с высотой, как и натяжение.



Луч в слоистой среде (нарисованы 8 слоёв; чем темнее слой, тем больше n): на каждой границе $n\sin\theta$ сохраняется, и луч идёт всё более полого, как верёвка

4. Постоянная F. В точке A верёвка составляет с вертикалью угол α, поэтому из $n\sin\theta = n_0\sin\beta$ получаем

$$n_A = n(H) = \frac{n_0\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

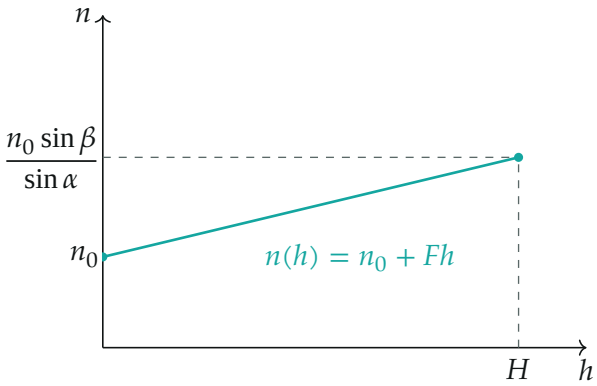
Линейная функция проходит через две точки: $n(0) = n_0$ и $n(H) = n_A$, откуда

$$F = \frac{n_A - n_0}{H} = \frac{n_0(\sin\beta - \sin\alpha)}{H\sin\alpha},$$

$$n(h) = n_0 + \frac{n_0(\sin\beta - \sin\alpha)}{H\sin\alpha}\,h.$$

Заодно найдена сила натяжения внизу: из $F = n_0\lambda g/T_B$ получаем

$$T_B = \frac{\lambda g H \sin\alpha}{\sin\beta - \sin\alpha}.$$



Показатель преломления воздуха линейно растёт с высотой над точкой B (график для $\alpha = 28°$, $\beta = 80°$)

5. Второй способ — минимумы. Тот же вывод на языке минимума. Равновесная верёвка заданной длины даёт минимум потенциальной энергии $\sum \lambda g h_i\,\Delta l_i$ при фиксированной сумме $\sum \Delta l_i$, т. е. минимум суммы $\sum (h_i + c)\,\Delta l_i$ с подходящей постоянной c. Луч по принципу Ферма даёт минимум времени $\sum n(h_i)\,\Delta l_i/c_{\text{св}}$. Одна и та же кривая минимизирует обе суммы при любом разбиении на малые участки, только если $n(h) \propto h + c$, т. е. линейна: $n(h) = G + Fh$, $G = n_0$ — ответ тот же.

Обратите внимание: α и β — углы с вертикалью, а не с горизонтом. Нормаль к горизонтальным слоям вертикальна, поэтому именно эти углы входят в $n\sin\theta = \text{const}$. Угол $\beta > \alpha$ (внизу верёвка положе), поэтому $n(H) > n_0$.

Проверка. Размерность: $\sin\beta - \sin\alpha$ безразмерно, F имеет размерность $1/H$, n безразмерен. Предел $\alpha = \beta$: тогда $F = 0$, $n = n_0$ — в однородном воздухе луч прямой, и верёвка прямая (при бесконечном

натяжении $T_B \to \infty$ в формуле $T_B = \lambda g H \sin\alpha / (\sin\beta - \sin\alpha)$). Условие $\beta > \alpha$ необходимо: при $\beta < \alpha$ натяжение T_B вышло бы отрицательным, т. е. такой верёвки не бывает. Физический смысл: показатель преломления растёт вверх так же, как натяжение верёвки, и луч, как верёвка, у верхней точки идёт круче.

Ответ. $n(h) = n_0 + \dfrac{n_0\,(\sin\beta - \sin\alpha)}{H \sin\alpha}\,h$ — показатель преломления линейно растёт с высотой от n_0 в точке B до $\dfrac{n_0 \sin\beta}{\sin\alpha}$ в точке A.