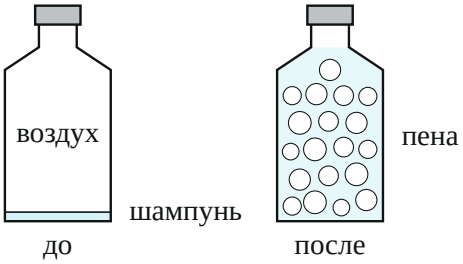
Пена в пузырьке из-под шампуня

Задача 1. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 7 класс, задача 1] Пузырёк из-под шампуня, в котором осталось немного жидкости, сильно взболтали до получения в нём однородной пены. Найти её плотность, если известно, что масса воздуха в пузырьке составляет одну треть от массы всего содержимого пузырька (воздуха и шампуня), плотность воздуха $\rho_в = 1{,}3$ кг/м^3, плотность шампуня $\rho_ш = 1100$ кг/м^3. Чему равна объёмная доля шампуня в пене?

1. Найти плотность пены.
2. Найти объёмную долю шампуня в пене.



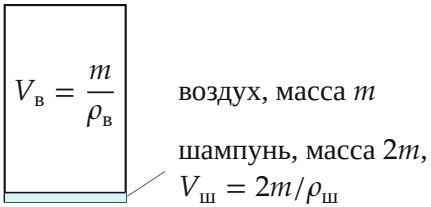
Поясняющий рисунок: остатки шампуня и воздух до взбалтывания; однородная пена после

▲ **Решение. Что происходит.** Пена — тот же воздух и тот же шампунь, только перемешанные: масса и объём пены складываются из массы и объёма воздуха и шампуня. Плотность пены — это вся масса, делённая на весь объём. Класс задачи — средняя плотность смеси.

Обозначения. m — масса воздуха; тогда вся масса $3m$ (воздух — её треть), а масса шампуня $2m$. $V_в$, $V_ш$ — объёмы воздуха и шампуня; ρ — плотность пены; φ — объёмная доля шампуня.

1. Объёмы частей. Мысленно соберём весь воздух в одну часть пузырька, а весь шампунь — в другую. Объём каждой части — масса, делённая на плотность:

$$V_в = \frac{m}{\rho_в}, \qquad V_ш = \frac{2m}{\rho_ш}.$$



Мысленно разделённая пена: воздух занимает почти весь объём, шампунь — тонкий слой у дна (в масштабе его не разглядеть)

2. Плотность пены. Средняя плотность — полная масса, делённая на полный объём:

$$\rho = \frac{3m}{V_в + V_ш} = \frac{3m}{\dfrac{m}{\rho_в} + \dfrac{2m}{\rho_ш}} = \frac{3\rho_в\rho_ш}{\rho_ш + 2\rho_в}.$$

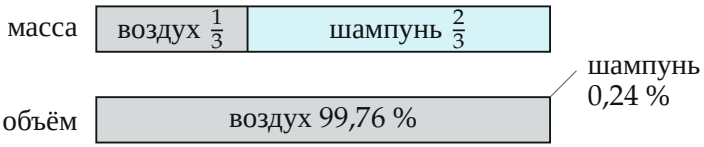
Масса m сократилась — ответ не зависит от размера пузырька:

$$\rho = \frac{3 \cdot 1{,}3 \cdot 1100}{1100 + 2{,}6}\ \text{кг/м}^3 = \frac{4290}{1102{,}6}\ \text{кг/м}^3 \approx 3{,}9\ \text{кг/м}^3.$$

3. Объёмная доля шампуня — объём шампуня, делённый на объём пены:

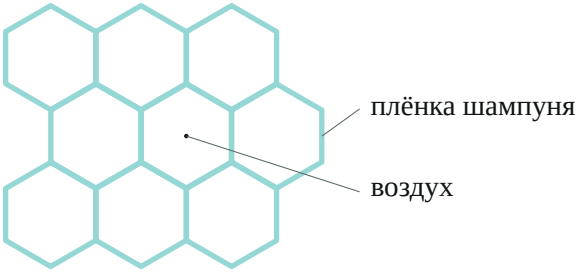
$$\varphi = \frac{V_ш}{V_в + V_ш} = \frac{\dfrac{2m}{\rho_ш}}{\dfrac{m}{\rho_в} + \dfrac{2m}{\rho_ш}} = \frac{2\rho_в}{\rho_ш + 2\rho_в} = \frac{2{,}6}{1102{,}6} \approx 2{,}4 \cdot 10^{-3},$$

то есть около 0,24 % объёма. У организаторов в ответе 0,0023 — то же число 0,00236, с отброшенной третьей цифрой.



Доли воздуха и шампуня по массе и по объёму (полосы в масштабе)

Как это выглядит внутри пены: пузырьки воздуха разделены тончайшими плёнками шампуня. Плёнки тяжёлые, но тонкие — на них приходится лишь 0,24 % объёма и две трети массы.



Пена под увеличением: ячейки воздуха и тонкие стенки из шампуня (толщина стенок условна)

Обратите внимание. По массе шампуня в пене вдвое больше, чем воздуха, а по объёму его почти нет: плотность шампуня почти в 850 раз больше. Поэтому пена лишь втрое плотнее воздуха.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\rho_в \rho_ш}{\rho_ш}$ — кг/м^3; φ — безразмерна. Предел: без шампуня (вся масса — воздух) формула $\rho = \dfrac{m_{полн}}{V}$ дала бы $\rho_в$; у нас масса втрое больше при почти том же объёме, и $\rho \approx 3\rho_в = 3{,}9$ кг/м^3 — сходится. Второй взгляд: $\rho = \varphi\rho_ш + (1-\varphi)\rho_в = 0{,}00236 \cdot 1100 + 0{,}998 \cdot 1{,}3 \approx 2{,}6 + 1{,}3 = 3{,}9$ кг/м^3. Смысл: пена — почти чистый воздух по объёму, утяжелённый тонкими плёнками шампуня.

Ответ. 1) $\rho = \dfrac{3\rho_в\rho_ш}{\rho_ш + 2\rho_в} \approx 3{,}9$ кг/м^3; 2) $\varphi = \dfrac{2\rho_в}{\rho_ш + 2\rho_в} \approx 2{,}4 \cdot 10^{-3}$ (около 0,24 %).