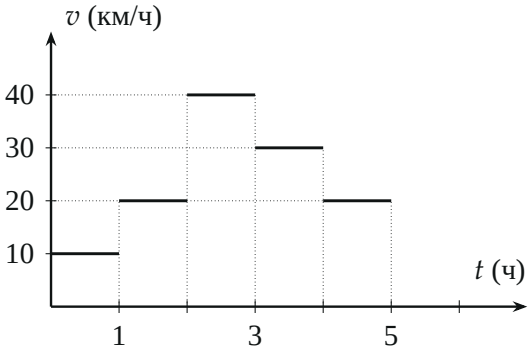
График скорости автомобиля

Задача 3. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 7 класс, задача 3] Автомобиль едет из одного города в другой со скоростью, зависимость которой от времени приведена на рисунке. Определить среднюю скорость автомобиля на первой трети пути и за первую треть полного времени движения.

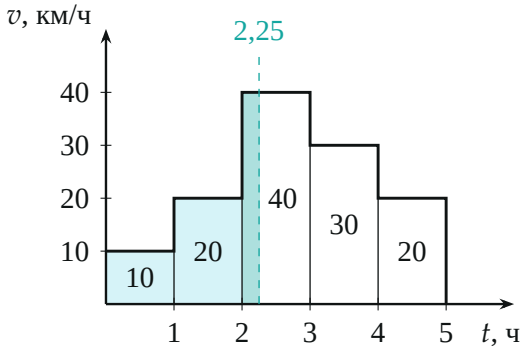


▲ **Решение.** **Что происходит.** Автомобиль едет пять часов, каждый час со своей постоянной скоростью. Средняя скорость — это весь путь участка, делённый на всё время участка (а не среднее арифметическое скоростей). «Первая треть пути» и «первая треть времени» — разные участки: в первом случае делим на три путь, во втором — время. Класс задачи — средняя скорость по графику $v(t)$.

Обозначения. S — весь путь, T — всё время движения; $v_{\text{ср},1}$ — средняя скорость на первой трети пути, $v_{\text{ср},2}$ — за первую треть времени.

1. Путь за каждый час. При постоянной скорости путь равен $v \cdot t$ — это площадь прямоугольника под графиком $v(t)$. За пять часов:

$$S = (10 + 20 + 40 + 30 + 20)\ \text{км} = 120\ \text{км}, \qquad T = 5\ \text{ч}.$$



Числа — пути (км) за каждый час, площади под графиком; закрашено первые 40 км пути

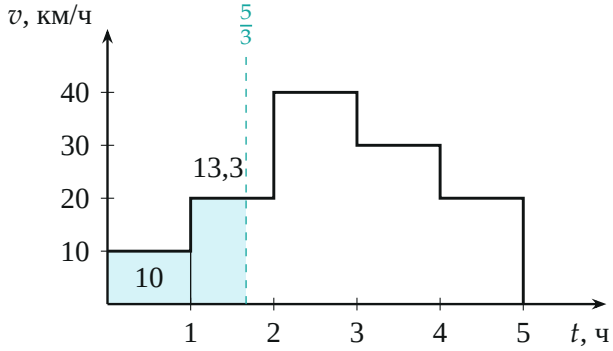
2. Первая треть пути. Это $S/3 = 40$ км. За первые 2 ч автомобиль проехал $10 + 20 = 30$ км — меньше 40. Оставшиеся 10 км он едет в третий час со скоростью 40 км/ч, на это нужно $\dfrac{10\text{ км}}{40\text{ км/ч}} = 0{,}25$ ч. Первую треть пути автомобиль проехал за 2,25 ч:

$$v_{ср,1} = \frac{S/3}{2{,}25\text{ ч}} = \frac{40\text{ км}}{2{,}25\text{ ч}} \approx 17{,}8\text{ км/ч}.$$

3. Первая треть времени. Это $T/3 = \dfrac{5}{3}$ ч $\approx 1{,}67$ ч: первый час со скоростью 10 км/ч и ещё $\dfrac{2}{3}$ ч со скоростью 20 км/ч. Путь

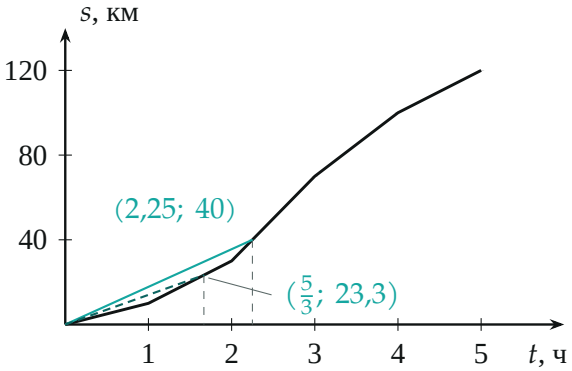
$$s_2 = 10\text{ км} + 20\text{ км/ч} \cdot \frac{2}{3}\text{ ч} = \left(10 + \frac{40}{3}\right)\text{ км} \approx 23{,}3\text{ км},$$

$$v_{ср,2} = \frac{s_2}{T/3} = \frac{70/3\text{ км}}{5/3\text{ ч}} = 14\text{ км/ч}.$$



Первая треть времени (5/3 ч): путь $10 + 13{,}3 \approx 23{,}3$ *км — закрашенная площадь*

Второй способ — график пути. Сложим пути по часам и построим зависимость пройденного пути $s(t)$: в концах часов $s = 0; 10; 30; 70; 100; 120$ км, между ними — отрезки прямых (скорость в течение часа постоянна). Средняя скорость на участке — наклон хорды из начала координат в конец участка. По графику: $s = 40$ км при $t = 2{,}25$ ч и $s \approx 23{,}3$ км при $t = 5/3$ ч — то же, что выше.



Путь $s(t)$ *по вычисленным точкам: наклоны хорд из начала координат — средние скорости 17,8 и 14 км/ч*

Обратите внимание. Средняя скорость — не среднее арифметическое скоростей: за первую треть времени скорости были 10 и 20 км/ч,

но среднее не 15, а 14 км/ч, потому что со скоростью 20 км/ч автомобиль ехал меньше времени.

Проверка. Размерность: км/ч. Оценка: обе средние лежат между наименьшей и наибольшей скоростью своего участка (10…40 и 10…20 км/ч). На первой трети пути средняя больше, чем за первую треть времени: в первую треть пути попал кусок быстрого третьего часа. Средняя за всю поездку $120/5 = 24$ км/ч больше обеих — в начале автомобиль ехал медленнее, чем потом.

Ответ. 1) $v_{\text{ср},1} = \dfrac{40\text{ км}}{2{,}25\text{ ч}} \approx 17{,}8$ км/ч; 2) $v_{\text{ср},2} = \dfrac{23{,}3\text{ км}}{5/3\text{ ч}} = 14$ км/ч.