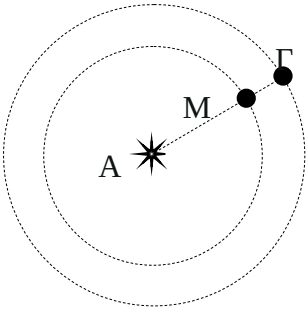
Планеты Медуза и Горгона

Задача 4. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 7 класс, задача 4] Вокруг звезды Аврора по круговым орбитам, лежащим в одной плоскости, вращаются в одну сторону две планеты — Медуза и Горгона. Год планеты Медуза составляет 0,9 года планеты Горгона. В некоторый момент времени планеты оказались на одном и том же радиусе, проведённом к ним от Авроры (см. рис.). Через какое минимальное количество горгонианских и медузианских лет наступит противостояние Медузы и Горгоны, т.е. такое их положение, когда Аврора окажется между планетами?



▲ **Решение. Что происходит.** Обе планеты бегут по кругу в одну сторону, как два бегуна на стадионе. Год Медузы короче, значит, она обходит круг быстрее и понемногу уходит вперёд от Горгоны. Противостояние — это когда Медуза обогнала Горгону ровно на пол-оборота: тогда планеты на одной прямой по разные стороны от звезды. Класс задачи — относительное движение по окружности: считаем не сами обороты, а то, на сколько оборотов одна планета опередила другую.

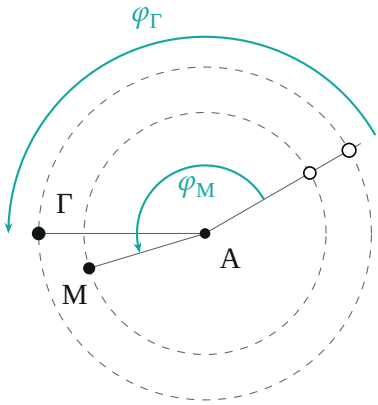
Обозначения. $T_\Г$ — год Горгоны (время одного её оборота), $T_\М = 0{,}9\,T_\Г$ — год Медузы; t — искомое время; $N_\Г$ и $N_\М$ — число оборотов, которые планеты сделали за время t; $\Delta N = N_\М - N_\Г$ — на сколько оборотов Медуза опередила Горгону.

1. Сколько оборотов делает каждая планета. Год — время одного оборота, поэтому за время t планета делает число оборотов, равное чис-

лу своих лет в этом времени:

$$N_Г = \frac{t}{T_Г}, \qquad N_М = \frac{t}{T_М} = \frac{t}{0{,}9\,T_Г}.$$

Медуза за то же время делает больше оборотов: её год короче.



Через время t после начала: светлые точки — начальные положения на общем радиусе, Медуза повернулась на больший угол, чем Горгона

2. Условие противостояния. В начальный момент планеты на одном радиусе. Медуза уходит вперёд, и угол между радиусами, проведёнными к планетам, растёт. Аврора окажется между планетами, когда этот угол станет равен 180°, то есть когда Медуза опередит Горгону на полоборота. Первое такое положение и есть искомое:

$$\Delta N = N_М - N_Г = \frac{1}{2}.$$

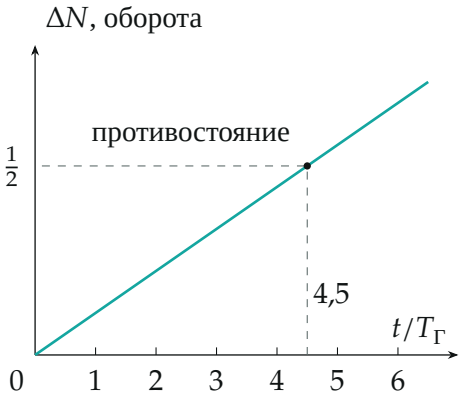
3. Решаем. Подставим числа оборотов из пункта 1:

$$\frac{t}{0{,}9\,T_Г} - \frac{t}{T_Г} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{t}{T_Г}\left(\frac{10}{9} - 1\right) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{t}{T_Г} = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

Горгонианских лет прошло 4,5, медузианских —

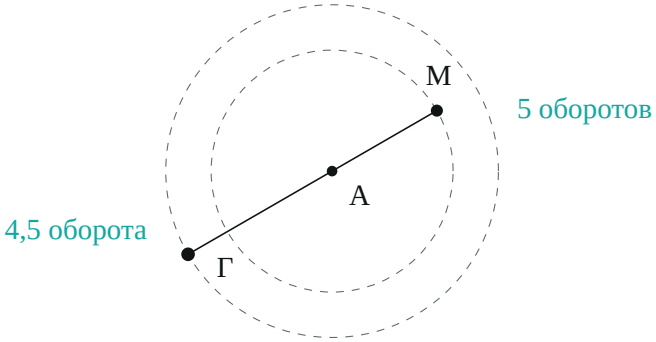
$$\frac{t}{T_М} = \frac{4{,}5\,T_Г}{0{,}9\,T_Г} = 5.$$

Каждый год Горгоны Медуза отыгрывает у неё $\frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9}$ оборота; половину оборота она наберёт за 4,5 таких года.



Опережение Медузы растёт равномерно, на $\frac{1}{9}$ оборота за год Горгоны; полоборота набегает за 4,5 $T_Г$

4. Где окажутся планеты. За 4,5 своих года Горгона сделает четыре с половиной оборота и встанет на противоположной стороне от начального радиуса. Медуза за 5 своих лет сделает ровно 5 оборотов и вернётся точно на начальный радиус. Аврора — между ними.



Противостояние: Медуза вернулась на начальный радиус, Горгона — на противоположной стороне, Аврора между ними

Обратите внимание. Нельзя просто ждать, пока Горгона сделает пол-оборота: за это время Медуза тоже уйдёт почти на пол-оборота, и планеты снова окажутся почти рядом. Важна только *разность* оборотов. Второе противостояние наступит ещё через 9 лет Горгоны: за это время Медуза опередит её на целый оборот.

Проверка. За $4{,}5\,T_\text{Г}$ Горгона делает 4,5 оборота, Медуза — 5; разность 0,5 оборота, как и нужно. Предел: если бы годы совпадали ($T_\text{М} = T_\text{Г}$), опережение не росло бы и противостояния не было бы никогда — в общей формуле

$$t = \frac{T_\text{Г}}{2\,(T_\text{Г}/T_\text{М} - 1)}$$

знаменатель обращается в ноль. Чем ближе годы, тем дольше ждать.

Ответ. Через 4,5 горгонианского года, что составляет 5 медузианских лет.