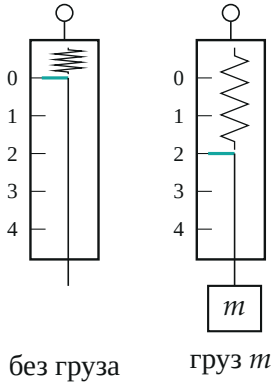
Динамометр с чужой пружиной

Задача 5. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 7 класс, задача 5] У динамометра по ошибке поменяли пружину: поставили пружину другой жёсткости. В результате динамометр стал давать неправильные показания: при подвешивании к его пружине груза массой $m_1 = 200$ г динамометр показывает силу $F_1 = 2{,}5$ Н, для груза массой $m_2 = 300$ г показания динамометра составляют $F_2 = 3{,}5$ Н. Какими будут показания динамометра, если к нему вообще не подвешивать никакого груза?



Поясняющий рисунок: исправный динамометр. Шкала размечена в ньютонах, указатель на конце пружины; без груза он стоит на нуле

▲ **Решение. Что происходит.** Шкала динамометра нарисована под старую пружину: деление «1 Н» стоит там, куда старую пружину оттягивает сила 1 Н. Показание — это просто положение указателя, переведённое в ньютоны по старой разметке. У новой пружины другая жёсткость и, как увидим, другая длина без нагрузки, поэтому указатель и без груза стоит не на нуле. Класс задачи — закон Гука и линейная зависимость: две пары «груз — показание» задают прямую, а нам нужна её точка при нулевом грузе.

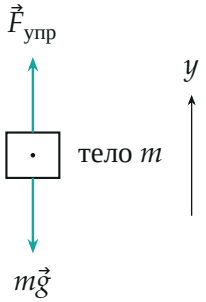
Обозначения. x — смещение указателя вниз от нулевой отметки шкалы; k — жёсткость старой пружины (по ней размечена шкала); k_1 — жёсткость новой пружины; x_0 — где стоит указатель с новой пружиной без груза; F_0 — показание без груза.

1. Как шкала переводит положение указателя в ньютоны. Старая пружина без груза ставила указатель на ноль, а сила F растягивала её на $x = F/k$ по закону Гука. Поэтому против смещения x на шкале написано

$$F_{\text{шк}} = k\,x.$$

Это правило «линейка → ньютоны» зашито в шкалу и от пружины не зависит.

2. Равновесие груза на новой пружине. Груз покоится, значит, сумма сил на него равна нулю: сила упругости пружины вверх равна силе тяжести mg вниз.



Силы на груз: упругость пружины и тяжесть уравновешивают друг друга

По закону Гука для новой пружины её удлинение под грузом m равно mg/k_1. Указатель сидит на конце пружины и смещается от своего положения без груза x_0 на это удлинение:

$$x = x_0 + \frac{mg}{k_1}.$$

3. Показание с новой пружиной. Переводим положение указателя по старой шкале (пункт 1):

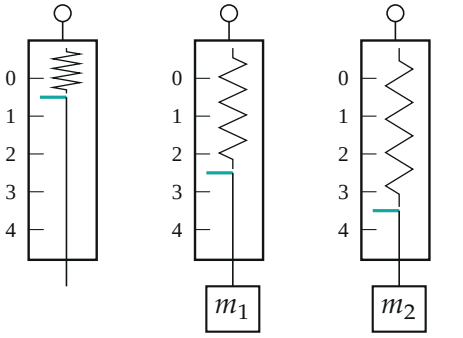
$$F = k\,x = \underbrace{k\,x_0}_{F_0} + \frac{k}{k_1}\,mg.$$

Первое слагаемое — показание без груза F_0, ради него и решаем задачу.

Для двух грузов:

$$F_1 = F_0 + \frac{k}{k_1} m_1 g, \qquad F_2 = F_0 + \frac{k}{k_1} m_2 g.$$

Неизвестных две: F_0 и комбинация $\dfrac{kg}{k_1}$; уравнений тоже два.



F_0 $F_1 = 2{,}5$ Н $F_2 = 3{,}5$ Н

Динамометр с новой пружиной: без груза указатель уже на 0,5 Н, с грузами m_1 и m_2 — на 2,5 и 3,5 Н

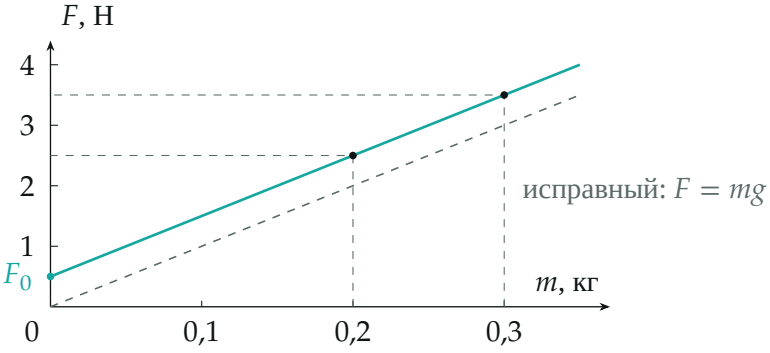
4. Решаем. Вычтем первое уравнение из второго — F_0 сокращается:

$$F_2 - F_1 = \frac{kg}{k_1}(m_2 - m_1) \quad \Rightarrow \quad \frac{kg}{k_1} = \frac{F_2 - F_1}{m_2 - m_1} = \frac{3{,}5 - 2{,}5}{0{,}3 - 0{,}2}\,\frac{\text{Н}}{\text{кг}} = 10\,\frac{\text{Н}}{\text{кг}}.$$

Из первого уравнения:

$$F_0 = F_1 - \frac{kg}{k_1} m_1 = \frac{m_2 F_1 - m_1 F_2}{m_2 - m_1} = 2{,}5\ \text{Н} - 10 \cdot 0{,}2\ \text{Н} = 0{,}5\ \text{Н}.$$

$F_0 > 0$: без груза указатель стоит ниже нуля шкалы — новая пружина длиннее старой.



Показание растёт с массой груза по прямой; продолжив её до $m = 0$, получаем $F_0 = 0{,}5$ Н. Пунктир — исправный динамометр

Обратите внимание. Наклон прямой $\dfrac{kg}{k_1} = 10$ Н/кг совпал с g: при $g = 10$ м/с^2 жёсткость новой пружины та же, что у старой, а отличается только её длина без нагрузки — график сдвинут вверх параллельно исправному. С одним грузом задачу не решить: неизвестных две, и вторая пара «груз — показание» нужна, чтобы найти наклон.

Проверка. Размерность: $(m_2F_1 - m_1F_2)/(m_2 - m_1)$ — кг·Н/кг = Н. Подстановка: $0{,}5+10\cdot0{,}2 = 2{,}5$ Н и $0{,}5+10\cdot0{,}3 = 3{,}5$ Н — оба показания из условия воспроизводятся. Предел: если бы пружину не меняли, точки лежали бы на прямой $F = mg$ и формула дала бы $F_0 = 0$.

Ответ. $F_0 = \dfrac{m_2F_1 - m_1F_2}{m_2 - m_1} = 0{,}5$ Н.