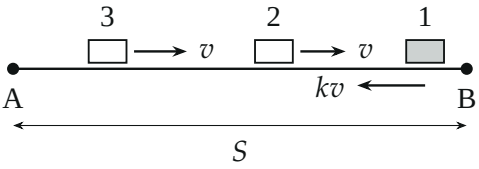
Три грузовика

Задача 1. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 8 класс, задача 1] Три грузовика возят грунт из города A в город B. Из города A грузовики выезжают с интервалом времени $\Delta t = 1$ час. Первый грузовик, доехав до города B, мгновенно разворачивается и едет назад в город A, встречая на своём пути два других грузовика. Через сколько времени после встречи с третьим грузовиком он прибудет в город A? Из A в B груженые грузовики едут со скоростью $v = 40$ км/ч, обратно — порожние — со скоростью kv, где $k = 1{,}6$. Расстояние между городами A и B $S = 100$ км.



Поясняющий рисунок: гружёные едут из A в B со скоростью v, порожний первый — обратно со скоростью kv

▲ **Решение. Что происходит.** Первый грузовик доезжает до B, разворачивается и едет навстречу двум другим. Нас интересует только встреча с третьим: в момент разворота первого надо узнать, где третий, а дальше это задача о встречном движении двух тел. Класс задачи — равномерное прямолинейное движение, встречное движение.

Обозначения. Время t отсчитываем от выезда первого грузовика из A; ось x направлена вдоль дороги от A к B, $x = 0$ — город A. t_1 — момент разворота первого грузовика в B; τ — время от разворота до встречи с третьим; t_3 — искомое время от встречи до прибытия в A.

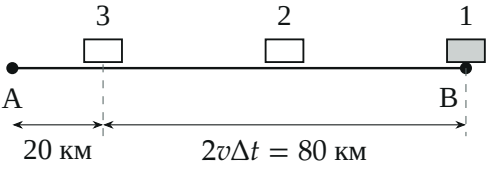
1. Разворот первого грузовика. Первый едет гружёным S со скоростью v:

$$t_1 = \frac{S}{v} = \frac{100}{40}\ \text{ч} = 2{,}5\ \text{ч}.$$

2. Где в этот момент третий. Третий выехал позже первого на $2\Delta t = 2$ ч и к моменту t_1 ехал $t_1 - 2\Delta t$:

$$x_3 = v\,(t_1 - 2\Delta t) = S - 2v\Delta t = 100\ \text{км} - 80\ \text{км} = 20\ \text{км}.$$

Между первым (в B) и третьим — расстояние $S - x_3 = 2v\Delta t = 80$ км: ровно столько, сколько гружёный грузовик проезжает за два интервала.



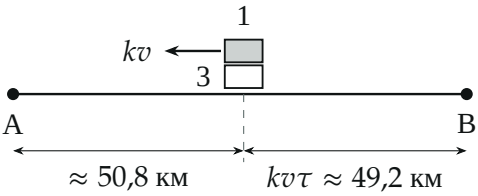
Момент $t_1 = 2{,}5$ ч: первый разворачивается в B, второй проехал 60 км, третий — 20 км

3. Встреча с третьим. Дальше первый едет к A со скоростью kv, третий — к B со скоростью v; расстояние между ними сокращается со скоростью сближения $v + kv$. Время до встречи

$$\tau = \frac{2v\Delta t}{v + kv} = \frac{2\Delta t}{1 + k} = \frac{2}{2{,}6}\ \text{ч} \approx 0{,}77\ \text{ч}.$$

4. Остаток пути первого. Весь обратный путь первый проходит за $S/(kv)$, из них τ — до встречи. Значит, после встречи до A он едет

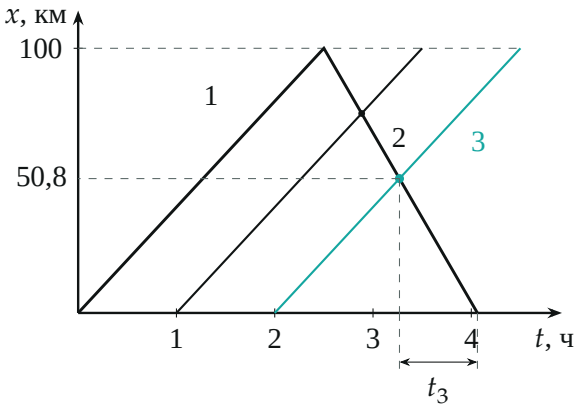
$$t_3 = \frac{S}{kv} - \frac{2\Delta t}{1 + k} = \frac{100}{64}\ \text{ч} - 0{,}769\ \text{ч} \approx 1{,}563\ \text{ч} - 0{,}769\ \text{ч} \approx 0{,}79\ \text{ч} \approx 48\ \text{мин}.$$



Встреча первого с третьим через $\tau \approx 0{,}77$ ч после разворота: до A первому осталось $\approx 50{,}8$ км

Второй способ — через графики движения. Нарисуем зависимости $x(t)$ всех трёх грузовиков по вычисленным точкам: гружёные — прямые с наклоном v, начинающиеся в $t = 0;\ 1;\ 2$ ч; первый после $t_1 = 2{,}5$ ч —

прямая вниз с наклоном kv. Пересечение графиков первого и третьего — встреча: $t = t_1 + \tau \approx 3{,}27$ ч, $x \approx 50{,}8$ км. Первый приходит в А в момент $t_1 + S/(kv) \approx 4{,}06$ ч, отсюда $t_3 \approx 4{,}06 - 3{,}27 \approx 0{,}79$ ч. Расстояние от встречи до А по графику: $t_3 = x/(kv) = 50{,}8/64$ ч $\approx 0{,}79$ ч — то же.



Графики $x(t)$ трёх грузовиков: точка — встреча первого с третьим, t_3 — время от неё до прибытия в А

Обратите внимание. В момент разворота третий грузовик уже в пути (он выехал через 2 ч, а разворот — через 2,5 ч). Если бы $S/v < 2\Delta t$, третий ещё стоял бы в А, и формула для τ была бы другой.

Проверка. Размерность: $\dfrac{S}{kv}$ и $\dfrac{\Delta t}{1+k}$ — часы. Предел $k \to \infty$ (мгновенный обратный путь): $t_3 \to 0$ — правильно. Второй способ (графики) дал то же 0,79 ч. Смысл: от встречи до А первому остаётся проехать столько же, сколько успел проехать третий, — около 51 км, на скорости 64 км/ч это чуть меньше 48 минут.

Ответ. $t_3 = \dfrac{S}{kv} - \dfrac{2\Delta t}{1+k} \approx 0{,}79$ ч (около 48 мин).