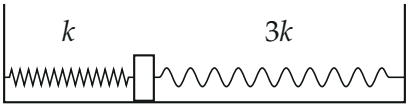
Две пружины между стенками

Задача 2. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 8 класс, задача 2] Две пружины с недеформированной длиной l и $3l$ и с коэффициентами жёсткости k и $3k$ прикреплены к вертикальным стенкам и телу, расположенному на горизонтальном полу (см. рис.). Расстояние между стенками $5l$.

1. На сколько сжаты или растянуты пружины?
2. Найти силы, с которыми пружины действуют на тело.

Размерами тела пренебречь.

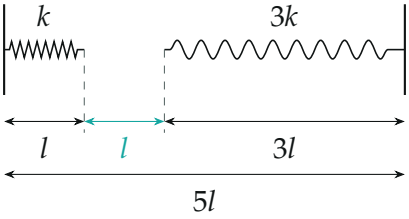


▲ **Решение. Что происходит.** Пружины вместе свободно занимают $l + 3l = 4l$, а между стенками $5l$: пружинам не хватает длины, обе вынуждены растянуться, и вместе — на l. Тело покоится, поэтому пружины тянут его в разные стороны с одинаковыми силами. Мягкая пружина при той же силе растягивается сильнее жёсткой. Класс задачи — равновесие тела под действием сил упругости (закон Гука).

Обозначения. x_1 — удлинение левой пружины (жёсткость k), x_2 — удлинение правой (жёсткость $3k$); удлинение положительно, если пружина растянута. F_1, F_2 — модули сил упругости, действующих на тело. Ось x направим вправо. Трения между телом и полом нет (иначе положение тела, а с ним и ответ, не определялись бы однозначно).

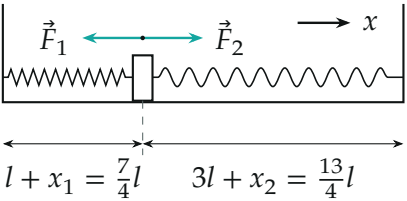
1. Связь удлинений (геометрия). Длины пружин в равновесии $l + x_1$ и $3l + x_2$ (размер тела не учитываем), вместе они перекрывают расстояние между стенками:

$$(l + x_1) + (3l + x_2) = 5l \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 = l.$$



Недеформированные пружины не достают друг до друга: не хватает длины l — столько вместе и растянутся пружины

2. Равновесие тела. На тело действуют: левая пружина растянута и тянет тело к левой стенке силой $\vec{F}_1$, правая растянута и тянет его к правой стенке силой $\vec{F}_2$; сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции пола $\vec{N}$ вертикальны.



Равновесие: обе пружины растянуты и тянут тело в разные стороны равными силами

Первый закон Ньютона для тела в проекции на горизонтальную ось x (вертикальные силы в неё не входят), силы упругости по закону Гука:

$$-F_1 + F_2 = 0, \qquad F_1 = k\,x_1, \quad F_2 = 3k\,x_2,$$
$$k\,x_1 = 3k\,x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3x_2.$$

Мягкая пружина растянута втрое сильнее жёсткой.

3. Удлинения. Подставляем $x_1 = 3x_2$ в $x_1 + x_2 = l$:

$$4x_2 = l \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{l}{4}, \qquad x_1 = \frac{3l}{4}.$$

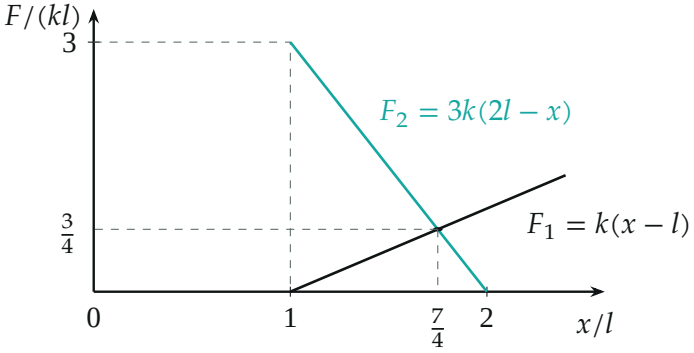
Оба удлинения положительны — обе пружины растянуты, как и ожидалось.

4. Силы.

$$F_1 = F_2 = k \cdot \frac{3l}{4} = 3k \cdot \frac{l}{4} = \frac{3}{4}kl.$$

Левая пружина тянет тело к левой стенке, правая — к правой.

Второй способ — графически. Пусть тело стоит на расстоянии x от левой стенки. Длина левой пружины x, правой $5l - x$; левая тянет тело влево с силой $F_1(x) = k(x - l)$, правая — вправо с силой $F_2(x) = 3k((5l - x) - 3l) = 3k(2l - x)$ (при $l < x < 2l$ обе растянуты). Это две прямые; тело в равновесии там, где они пересекаются.



Силы пружин в зависимости от положения тела: прямые пересекаются при $x = \frac{7}{4}l$, $F = \frac{3}{4}kl$

Из $k(x-l) = 3k(2l-x)$ получаем $4x = 7l$, $x = \frac{7}{4}l$: удлинения $x_1 = \frac{3}{4}l$ и $x_2 = 2l - x = \frac{1}{4}l$, сила $\frac{3}{4}kl$ — то же.

Обратите внимание. Удлинения делятся обратно пропорционально жёсткостям ($x_1 : x_2 = 3 : 1$), а не поровну и не пропорционально длинам пружин.

Проверка. Размерность: kl — Н/м·м = Н. Предел: в общем виде (жёсткости k_1, k_2) удлинение первой $x_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2}l$; при равных жёсткостях получаем по $l/2$ на каждую, как и должно быть по симметрии. Сумма удлинений $\frac{3}{4}l + \frac{1}{4}l = l$ — столько и не хватало. Смысл: две пружины,

соединённые через тело, тянутся последовательно; мягкая берёт на себя большую часть удлинения.

Ответ. 1) обе пружины растянуты: пружина жёсткостью k — на $\frac{3}{4}l$, пружина жёсткостью $3k$ — на $\frac{1}{4}l$; 2) каждая пружина действует на тело с силой $\frac{3}{4}kl$: левая тянет тело к левой стенке, правая — к правой.