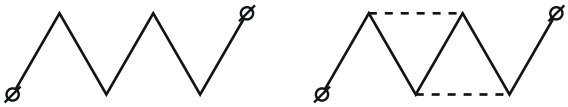
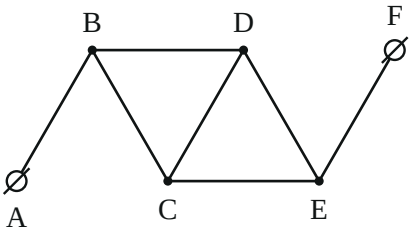
Цепь из пяти проводников

Задача 3. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 8 класс, задача 3] Электрическая цепь составлена из пяти одинаковых проводников (левый рисунок) и имеет сопротивление R. В цепь вводят ещё два точно таких же проводника так, как это показано пунктиром на правом рисунке. Каким будет теперь сопротивление цепи?



▲ **Решение. Что происходит.** До добавки пять проводников соединены последовательно. После добавки цепь становится «мостом», который не сводится сразу к последовательным и параллельным соединениям. Ключ — симметрия: две точки моста оказываются при одинаковом потенциале, ток через проводник между ними не течёт, и его можно убрать. Класс задачи — расчёт сопротивления цепи, симметрия и равные потенциалы.

Обозначения. r — сопротивление одного проводника. Узлы: A — левый вывод, B, D — верхние вершины, C, E — нижние, F — правый вывод (как на рисунке ниже). I — ток в цепи, U — напряжение между выводами, φ — потенциалы узлов.



Новая цепь: семь одинаковых проводников, узлы обозначены

1. Исходная цепь. Пять проводников соединены последовательно (ток идёт по ним по очереди, разветвлений нет), сопротивления

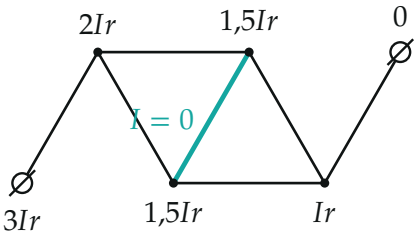
складываются:

$$R = 5r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R}{5}.$$

2. Симметрия новой цепи. Выводы A и F подключены к остальной цепи только через проводники AB и EF. Значит, весь ток I идёт по AB в узел B и выходит из узла E по EF. Между B и E — четыре проводника BC, BD, CE, DE и перемычка CD. Поменяем местами буквы C и D: BC станет BD, CE станет DE, перемычка CD останется перемычкой — цепь между B и E не изменилась. Значит, токи и потенциалы в узлах C и D одинаковы:

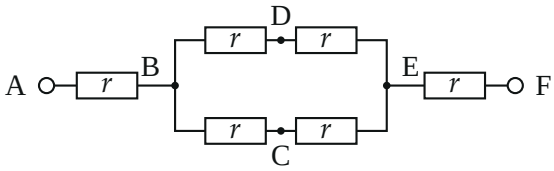
$$\varphi_C = \varphi_D.$$

По закону Ома ток через перемычку $I_{CD} = \dfrac{\varphi_C - \varphi_D}{r} = 0$. Проводник, по которому не идёт ток, можно убрать — ничего в цепи не изменится.



Потенциалы узлов (за ноль взят вывод F): у концов перемычки CD они равны, ток по ней не идёт

3. Схема без перемычки. Без CD цепь простая: проводник AB, затем от B до E две одинаковые ветви BCE и BDE по $2r$ (в каждой два проводника последовательно), затем проводник EF.



Эквивалентная схема после удаления перемычки CD

Две параллельные ветви по $2r$ дают $\dfrac{2r\cdot 2r}{2r+2r}=r$, и всё последовательно:

$$R'=r+r+r=3r=\frac{3}{5}R.$$

Второй способ — через токи. Пустим ток I. По AB течёт I; в узле B он делится поровну между одинаковыми ветвями: по $I/2$ через BC и BD. По закону Ома $\varphi_C=\varphi_B-\dfrac{I}{2}r$ и $\varphi_D=\varphi_B-\dfrac{I}{2}r$ — потенциалы равны, по CD тока нет, предположение согласовано. Напряжение между выводами — сумма падений на AB, на ветви BCE и на EF:

$$U=Ir+\frac{I}{2}\cdot 2r+Ir=3Ir\quad\Rightarrow\quad R'=\frac{U}{I}=3r.$$

Обратите внимание. Перемычка BD (верхняя пунктирная) ток проводит: именно она открывает вторую ветвь от B к E. Убрать можно только тот проводник, у концов которого потенциалы равны, — здесь это CD.

Проверка. Размерность: сопротивление через сопротивление. Знак: добавили проводники параллельно части цепи — сопротивление должно уменьшиться, и $3r<5r$. Численная проверка: решение уравнений Кирхгофа для всех узлов на компьютере даёт те же потенциалы $3:2:1{,}5:1{,}5:1:0$. Смысл: добавленные проводники открыли второй путь току на среднем участке, и три средних проводника превратились в сопротивление r.

Ответ. $R'=\dfrac{3}{5}R$.