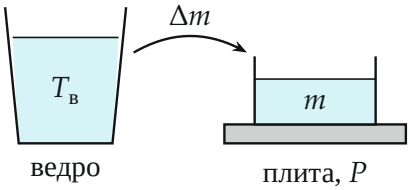
Температура воды в ведре

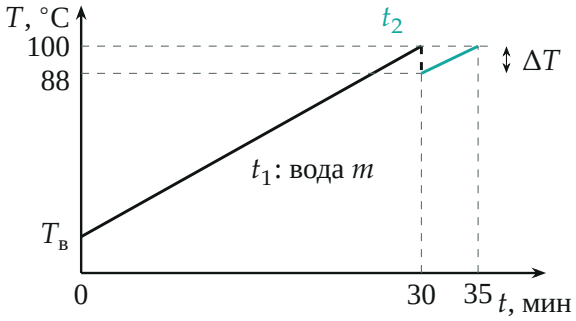
Задача 4. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 8 класс, задача 4] Некоторое количество воды налили в кастрюлю из большого ведра и поставили кастрюлю на плиту. Известно, что через время $t_1 = 30$ мин после этого вода в кастрюле закипела. Тогда кастрюлю сняли с плиты и долили в неё из того же ведра дополнительное количество воды. При этом температура воды в кастрюле понизилась на $\Delta T = 12\,^\circ\text{C}$. После этого кастрюлю снова поставили на плиту, и вода в ней закипела через время $t_2 = 5$ мин. Какова температура воды в ведре? Считать, что плита обеспечивает постоянный поток тепла, теплообменом воды с внешней средой и теплоёмкостью кастрюли пренебречь.



Поясняющий рисунок: вода из ведра при температуре $T_в$ греется на плите; потом в кастрюлю доливают ещё Δm из ведра

▲ **Решение. Что происходит.** Плита каждую минуту даёт воде одно и то же количество тепла. Три события: нагрев воды m от $T_в$ до кипения; смешивание кипятка с холодной водой Δm; нагрев смеси на ΔT обратно до кипения. Неизвестных много (масса, мощность, температура), но их отношения выражаются через времена. Класс задачи — уравнение теплового баланса для нагрева и смешивания.

Обозначения. m — масса воды, налитой сначала; Δm — масса долитой воды; $T_в$ — искомая температура воды в ведре; $T_к = 100\,^\circ\text{C}$ — температура кипения; P — тепловая мощность плиты (тепло за единицу времени); c — удельная теплоёмкость воды.



Температура воды в кастрюле: нагрев за t_1, доливание (скачок вниз на ΔT), нагрев за t_2; построено по найденному ответу

1. Первый нагрев. Уравнение теплового баланса для воды m за время t_1: всё тепло плиты идёт на нагрев воды от $T_в$ до $T_к$ (потерь нет, кастрюля тепла не берёт):

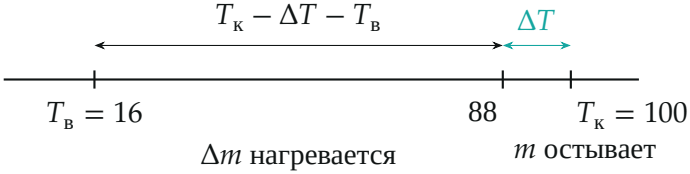
$$c\,m\,(T_к - T_в) = P\,t_1.$$

2. Второй нагрев. Теперь греется вся вода $m + \Delta m$, от $T_к - \Delta T$ до $T_к$, за время t_2:

$$c\,(m + \Delta m)\,\Delta T = P\,t_2.$$

3. Смешивание. Без плиты и без потерь тепло, отданное кипятком m при остывании на ΔT, получила долитая вода Δm, нагревшись от $T_в$ до общей температуры $T_к - \Delta T$:

$$c\,m\,\Delta T = c\,\Delta m\,(T_к - \Delta T - T_в).$$



Смешивание на шкале температур: $m \cdot \Delta T = \Delta m \cdot (T_к - \Delta T - T_в)$ — чем больше масса, тем меньше её отрезок

4. Исключаем неизвестные. Делим уравнение второго нагрева на уравнение первого — c и P сокращаются:

$$\frac{(m+\Delta m)\,\Delta T}{m\,(T_к - T_в)} = \frac{t_2}{t_1}.$$

Из уравнения смешивания $\Delta m = \dfrac{m\,\Delta T}{T_к - \Delta T - T_в}$, поэтому

$$\frac{m+\Delta m}{m} = 1 + \frac{\Delta T}{T_к - \Delta T - T_в} = \frac{T_к - T_в}{T_к - \Delta T - T_в}.$$

Подставляем — множитель $T_к - T_в$ сокращается:

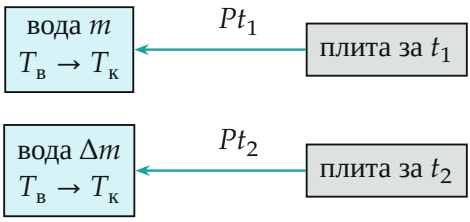
$$\frac{\Delta T}{T_к - \Delta T - T_в} = \frac{t_2}{t_1} \quad \Rightarrow \quad T_к - \Delta T - T_в = \Delta T\,\frac{t_1}{t_2}.$$

5. Ответ.

$$T_в = T_к - \Delta T\left(1 + \frac{t_1}{t_2}\right) = 100°\text{C} - 12°\text{C}\cdot\left(1 + \frac{30}{5}\right) = 16°\text{C}.$$

Второй способ — баланс за всё время. Посмотрим на итог второго этапа целиком: вода m снова кипит — для неё ничего не изменилось, а долитая Δm нагрелась от $T_в$ до $T_к$. Значит, тепло второго нагрева Pt_2 целиком ушло на нагрев Δm от $T_в$ до $T_к$, так же как Pt_1 — на нагрев m:

$$c\,\Delta m\,(T_к - T_в) = P\,t_2, \quad c\,m\,(T_к - T_в) = P\,t_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta m}{m} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{6}.$$



Второй способ: за t_1 плита греет m, за t_2 — в итоге только долитую Δm, на тот же интервал температур

Смесь после доливания имеет температуру, при которой остывание m уравновешено нагревом Δm: каждая «доля» массы смеси вносит свою температуру, поэтому понижение

$$\Delta T = \frac{\Delta m}{m + \Delta m}\,(T_к - T_в) = \frac{1}{7}\,(T_к - T_в),$$
$$T_к - T_в = 7 \cdot 12°\text{C} = 84°\text{C}, \qquad T_в = 16°\text{C}.$$

Обратите внимание. Второй нагрев идёт на ΔT, а не от $T_в$: греется уже смесь, температура которой всего на 12°C ниже кипения.

Проверка. Размерность: $\Delta T\,(1 + t_1/t_2)$ — градусы. Предел: если бы доливали воду с температурой почти 100°C, она почти не охлаждала бы кастрюлю, и при заметном ΔT понадобилось бы очень много воды — тогда второй нагрев длился бы долго; формула это и показывает: при $T_в \to T_к - \Delta T$ отношение $t_1/t_2 \to 0$. Два способа дали одно и то же. Смысл: отношение времён нагрева равно отношению масс воды, а скачок температуры при смешивании — доле долитой воды в смеси.

Ответ. $T_в = T_к - \Delta T\left(1 + \dfrac{t_1}{t_2}\right) = 16°\text{C}.$