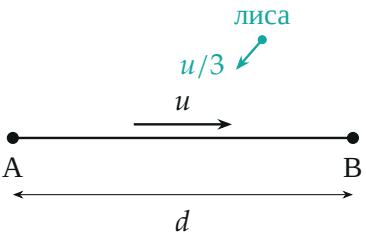
Лиса и суслик

Задача 5. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 8 класс, задача 5] Лиса пытается поймать суслика, который перебегает из норки A в норку B, находящиеся на расстоянии d друг от друга. Скорость лисы в три раза меньше скорости суслика. При этом суслик дразнит лису. Он по вибрации почвы чувствует, где находится лиса, и стартует только в том случае, когда лиса не может поймать его. По возможности точно нарисуйте область, находясь в которой лиса сможет поймать суслика, и определите её геометрические параметры. Построение этой области должно быть обосновано.



Поясняющий рисунок: суслик бежит по прямой из A в B со скоростью u, лиса — со скоростью $u/3$

▲ **Решение.** **Что происходит.** Суслик бежит по прямой AB. Лиса ловит его, если успевает оказаться в какой-нибудь точке его пути не позже суслика. Главная идея — строить область «наоборот»: для каждой точки пути суслика найти, откуда лиса успевает в неё прибежать, а потом объединить эти места по всем точкам пути. Класс задачи — кинематика равномерного движения с геометрическим построением; параметры области найдём из прямоугольных треугольников.

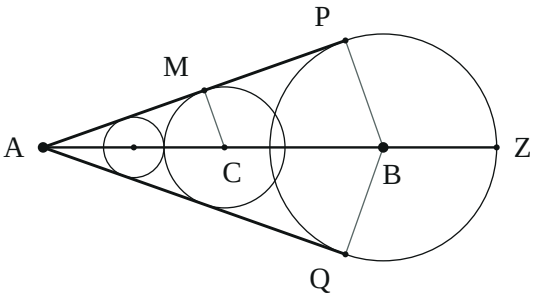
Обозначения. u — скорость суслика, $u/3$ — скорость лисы; C — произвольная точка отрезка AB; t — время бега суслика от A до C, $AC = ut$; α — угол между AB и касательной из точки A к кругам (найдём его ниже).

1. Откуда лиса успевает в точку C. Суслик стартует из норки A и окажется в точке C через время $t = AC/u$. Лиса бежит к C по прямой

(это кратчайший путь) и за то же время пробежит $\frac{u}{3}t = \frac{AC}{3}$. Значит, лиса ловит суслика в точке C, если в момент старта она находится внутри круга с центром C и радиусом

$$r_C = \frac{AC}{3}.$$

Искомая область — объединение всех таких кругов, когда C пробегает отрезок от A до B. В точке A радиус нулевой, у норки B — самый большой, $d/3$.



Круги, из которых лиса успевает в точку пути суслика: все касаются двух прямых AP и AQ

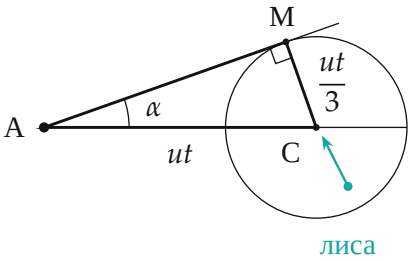
2. Касательные ко всем кругам — одни и те же две прямые. Проведём из A касательную к кругу с центром C; M — точка касания. Радиус в точку касания перпендикулярен касательной, поэтому треугольник AMC прямоугольный, и

$$\sin\angle MAC = \frac{CM}{AC} = \frac{AC/3}{AC} = \frac{1}{3}.$$

Угол не зависит от выбора точки C: все прямоугольные треугольники с катетом, втрое меньшим гипотенузы, подобны. Значит, касательные из A ко всем кругам совпадают — это две прямые AP и AQ под углом

$$\alpha = \arcsin\frac{1}{3} \approx 19{,}5^\circ$$

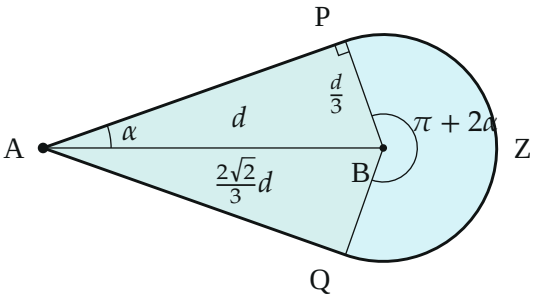
к отрезку AB по разные стороны от него. Каждый круг лежит внутри угла PAQ и касается обеих его сторон.



Прямоугольный треугольник AMC: катет CM втрое меньше гипотенузы AC; лиса внутри круга успевает в C

3. Граница области. Объединение кругов состоит из двух частей. Пока C идёт от A к B, круги растут и заполняют внутренность угла PAQ вплоть до отрезков касательных AP и AQ (P и Q — точки касания с самым большим кругом, у норки B). Дальше B кругов нет, поэтому за отрезком PQ область кончается дугой PZQ самого большого круга (с центром B и радиусом $d/3$). Итог: область ограничена отрезками AP, AQ и большой дугой PZQ.

4. Параметры области. Проведём радиусы BP и BQ: они делят область на два прямоугольных треугольника ABP, ABQ и круговой сектор PBQZ.



Область, откуда лиса ловит суслика: угол PAQ, обрезанный дугой окружности радиуса $d/3$ с центром B

Угол при вершине A. Каждая касательная идёт под углом α к AB, поэтому

$$\angle PAQ = 2\alpha = 2\arcsin\frac{1}{3} \approx 38{,}9^\circ.$$

Отрезки касательных. В прямоугольном треугольнике ABP (прямой угол при P) гипотенуза $AB = d$, катет $BP = d/3$; по теореме Пифагора

$$AP = AQ = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,d \approx 0{,}94\,d.$$

Дуга. Радиус дуги PZQ равен $d/3$, центр — норка B. В треугольнике ABP угол при B равен $90^\circ - \alpha$, то есть $\cos\angle ABP = \dfrac{BP}{AB} = \dfrac{1}{3}$. Угол PBQ, обращённый к A, равен

$$\angle PBQ = 2\arccos\frac{1}{3} = \pi - 2\alpha \approx 141^\circ,$$

а сама дуга PZQ (центральный угол сектора) — остальные

$$\varphi = 2\pi - \angle PBQ = \pi + 2\alpha \approx 219^\circ.$$

Размеры. Самая дальняя от A точка области — Z: $AZ = d + \dfrac{d}{3} = \dfrac{4}{3}\,d$. Наибольшая ширина поперёк AB — диаметр круга у норки B, $\dfrac{2}{3}\,d$: направления $\pm 90^\circ$ от AB лежат внутри дуги PZQ, ведь она простирается на $\pm(90^\circ + \alpha)$.

Площадь (для полноты): два треугольника по $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{d}{3}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}\,d}{3} = \dfrac{\sqrt{2}\,d^2}{9}$ и сектор $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d}{3}\right)^2(\pi + 2\alpha)$:

$$S = \frac{2\sqrt{2}\,d^2}{9} + \left(\pi + 2\arcsin\frac{1}{3}\right)\frac{d^2}{18} \approx 0{,}53\,d^2.$$

Обратите внимание. Не путайте два угла: при вершине A касатель-

ные расходятся на острый угол $2\alpha \approx 39°$, а при центре B между радиусами BP и BQ — тупой угол $\approx 141°$; в треугольнике ABP углы при A и при B дополняют друг друга до 90°.

Проверка. Размерности: углы безразмерны, длины пропорциональны d. Численно: точки плоскости брались случайно, и для каждой проверялось, есть ли точка C на AB, до которой лиса бежит не дольше суслика; «пойманные» точки заполнили ровно эту фигуру, их доля дала $S \approx 0{,}527\,d^2$. Предел: если бы лиса была так же быстра, как суслик ($\sin\alpha = 1$), угол раскрылся бы до 180° — лиса ловила бы суслика почти отовсюду со стороны норки B. Смысл: чем ближе лиса к норке A, тем меньше у неё шансов — суслик стартует раньше, чем она успеет добежать.

Ответ. Область ограничена отрезками касательных AP и AQ из норки A и большой дугой PZQ окружности радиуса $d/3$ с центром в норке B. Угол $\angle PAQ = 2\arcsin\frac{1}{3} \approx 39°$; $AP = AQ = \frac{2\sqrt{2}}{3}d \approx 0{,}94\,d$; центральный угол дуги PZQ $\pi + 2\arcsin\frac{1}{3} \approx 219°$ (угол PBQ со стороны A — $2\arccos\frac{1}{3} \approx 141°$); длина области $\frac{4}{3}d$, ширина $\frac{2}{3}d$, площадь $\approx 0{,}53\,d^2$.