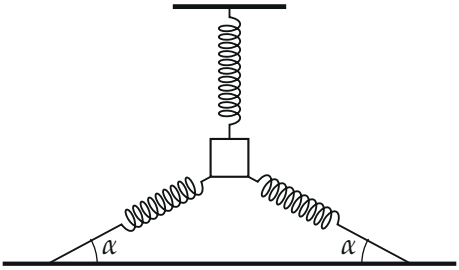
Груз на трёх пружинах

Задача 2. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 9 класс, задача 2] Груз массой m, прикреплённый к трём пружинам, находится в равновесии. Верхняя пружина вертикальна, причём сила её натяжения направлена вертикально вверх и составляет $F = 2mg$. Две нижние пружины одинаковы и составляют одинаковый угол α с горизонтом (см. рис.). Найти ускорение груза сразу после перерезания верхней пружины. Найти ускорение груза сразу после перерезания одной из нижних пружин (после восстановления верхней).

1. Найти ускорение груза сразу после перерезания верхней пружины.
2. Найти ускорение груза сразу после перерезания одной из нижних пружин (после восстановления верхней).



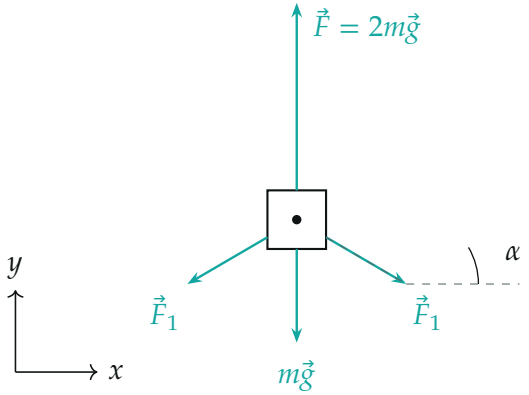
▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на «мгновенное» ускорение после перерезания. Главная идея: сила упругости пружины определяется её деформацией, а деформация не может измениться мгновенно — для этого груз должен сместиться, а в первый момент он ещё на месте. Поэтому сразу после перерезания исчезает только сила перерезанной пружины, остальные силы остаются прежними. До перерезания все силы уравновешены, значит, равнодействующая оставшихся сил равна исчезнувшей силе по модулю и противоположна ей по направлению.

Обозначения. $F = 2mg$ — сила верхней пружины (вверх); F_1 — сила каждой нижней пружины; $\vec{a}_{\text{в}}$, $\vec{a}_{\text{н}}$ — ускорения груза сразу после перерезания верхней и одной нижней пружины. Оси: x — горизонтально вправо, y — вертикально вверх.

1. Силы в равновесии. Верхняя пружина тянет вверх с силой $2mg$, а тяжесть — только mg. Значит, нижние пружины тянут груз вниз: они растянуты, и каждая действует вдоль себя к своей точке крепления, под углом α к горизонту вниз. По симметрии их силы одинаковы. Первый закон Ньютона для груза в проекции на ось y:

$$F - mg - 2F_1 \sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 = \frac{F - mg}{2\sin\alpha} = \frac{mg}{2\sin\alpha}.$$

В проекции на ось x горизонтальные составляющие $F_1 \cos\alpha$ нижних пружин взаимно уничтожаются.



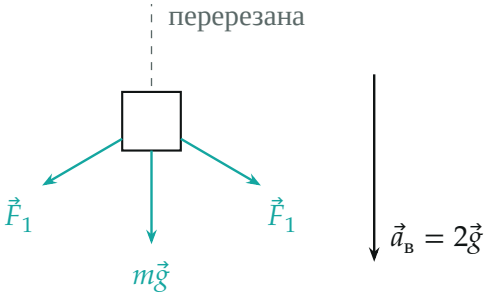
Силы, действующие на груз в равновесии (длины стрелок — в масштабе, для $\alpha \approx 30°$): нижние пружины растянуты и тянут груз вниз

2. Перерезали верхнюю пружину. В первый момент груз на месте, деформации нижних пружин прежние, и их силы прежние. Исчезла только сила $\vec{F}$. Второй закон Ньютона для груза:

$$m\vec{a}_{\text{в}} = m\vec{g} + \vec{F}_1^{\text{лев}} + \vec{F}_1^{\text{прав}} = -\vec{F},$$

так как до перерезания сумма всех четырёх сил была равна нулю. В проекции на ось y: $ma_{\text{в}y} = -mg - 2F_1 \sin\alpha = -mg - mg = -2mg$, в проекции на x — нуль. Получаем

$$a_{\text{в}} = 2g, \quad \text{направлено вертикально вниз.}$$



Сразу после перерезания верхней пружины: силы нижних пружин и тяжести прежние, их сумма $2mg$ вниз

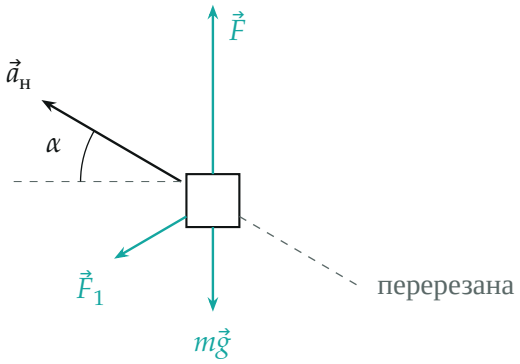
3. Восстановили верхнюю и перерезали нижнюю (правую). Исчезла только сила $\vec{F}_1$ правой пружины, направленная вниз-вправо под углом α к горизонту. Оставшиеся силы $m\vec{g}$, $\vec{F}$, $\vec{F}_1^{\text{лев}}$ до перерезания уравновешивали её, значит их сумма равна $-\vec{F}_1^{\text{прав}}$. Проверим проекциями (второй закон Ньютона):

$$x: \quad ma_{\text{н}x} = -F_1 \cos\alpha,$$

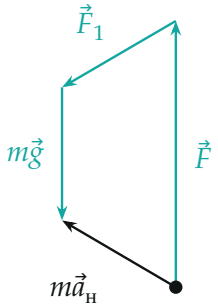
$$y: \quad ma_{\text{н}y} = F - mg - F_1 \sin\alpha = 2mg - mg - \frac{mg}{2} = \frac{mg}{2} = F_1 \sin\alpha.$$

Вектор $\vec{a}_{\text{н}}$ направлен вверх-влево под углом α к горизонту (тангенс угла $a_y/|a_x| = \operatorname{tg}\alpha$), то есть вдоль перерезанной пружины, но в противоположную сторону. Модуль

$$a_{\text{н}} = \frac{F_1}{m} = \frac{g}{2\sin\alpha}.$$



Сразу после перерезания правой нижней пружины: ускорение направлено против исчезнувшей силы — вверх-влево под углом α к горизонту



Сложение оставшихся сил «цепочкой» (в масштабе): $\vec{F} + \vec{F}_1 + m\vec{g}$ замыкается вектором $m\vec{a}_н$, равным по модулю F_1

Обратите внимание: ускорение после перерезания нижней пружины не равно g и не направлено вниз — груз в первый момент «отскакивает» против перерезанной пружины. При малых α сила $F_1 = \dfrac{mg}{2\sin\alpha}$ велика (почти горизонтальные пружины должны сильно растянуться, чтобы дать вертикальную силу mg), и ускорение тоже велико.

Ответ. 1) $a_в = 2g$, направлено вертикально вниз; 2) $a_н = \dfrac{g}{2\sin\alpha}$, направлено противоположно силе перерезанной пружины — вверх под углом α к горизонту, в сторону от её точки крепления.

Проверка. Размерность: $g/\sin\alpha$ — м/с^2. Второй способ для пункта 2 — через проекции (пункт 3) дал тот же модуль:

$$\sqrt{(F_1\cos\alpha)^2+(F_1\sin\alpha)^2}=F_1.$$

Предел: при $\alpha=90^\circ$ (нижние пружины вертикальны) $a_\text{н}=g/2$ вверх — правильно: перерезали пружину, тянувшую вниз с силой $mg/2$. В пункте 1 ответ $2g$ от α не зависит, потому что исчезает вертикальная сила $2mg$.

Ответ. 1) $a_\text{в}=2g$, вертикально вниз; 2) $a_\text{н}=\dfrac{g}{2\sin\alpha}$, противоположно силе перерезанной пружины (вверх под углом α к горизонту).