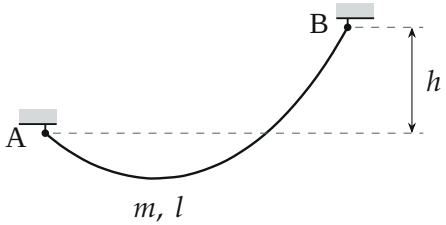
Верёвка на разной высоте

Задача 3. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 9 класс, задача 3] Однородную нерастяжимую гибкую веревку массой m и длиной l подвесили в двух точках A и B, находящихся на разных высотах (см. рис.). Сила натяжения веревки в точке A известна и равна T_A. Найти силу натяжения веревки в точке B, которая находится на h выше точки A.

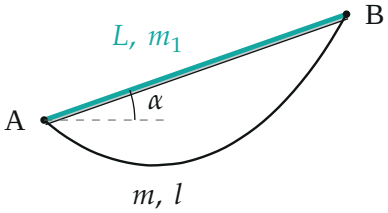


Поясняющий рисунок: верёвка висит между точками A и B

▲ **Решение.** **Что происходит.** Верёвка провисает, и натяжение вдоль неё меняется: чем выше точка, тем больше веса висящей ниже верёвки она держит. Форму провисания (цепную линию) девятикласснику не найти, поэтому нужен приём, который обходит форму. Приём такой: дополним верёвку куском, лежащим на гладкой наклонной плоскости, и сведём задачу к равновесию прямого куска на наклонной плоскости. Класс задачи — статика гибкой нити.

Обозначения. T_A, T_B — натяжения верёвки в точках A и B; L — длина отрезка AB; α — угол наклона AB к горизонту, $\sin\alpha = h/L$; m_1 — масса куска верёвки длиной L из того же материала. Ось x направим вдоль плоскости вверх, от A к B.

1. Мысленный опыт. Соединим точки A и B гладкой наклонной плоскостью (тонкой доской) и положим на неё кусок такой же верёвки длиной L, а концы этого куска соединим с концами висящей верёвки в точках A и B: получилась замкнутая петля. В точках A и B петля огибает гладкие рёбра доски.

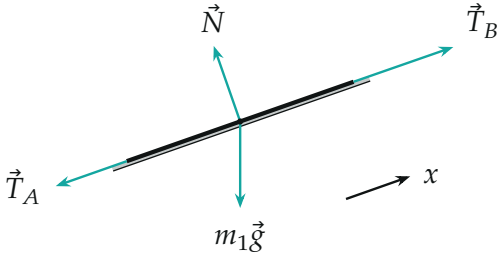


Петля: висящая верёвка и кусок той же верёвки на гладкой доске AB

Петля в равновесии. Если бы она начала двигаться, то, сдвинувшись по кругу, вернулась бы в ту же самую форму — и так без конца, без затрат энергии. Такого вечного двигателя нет, значит, петля покоится. Висящая часть при этом осталась прежней: закрепим её концы в A и B и уберём кусок на доске — получим исходную верёвку. Поэтому натяжения висящей части в A и B — те самые T_A и T_B.

2. Натяжение при огибании гладкого ребра. Гладкое ребро доски давит на верёвку перпендикулярно ей и не тянет вдоль неё. Поэтому модуль натяжения при огибании ребра не меняется: кусок на доске тянут за нижний конец с силой T_A, за верхний — с силой T_B.

3. Равновесие куска на доске. На него действуют: $\vec{T}_B$ — вдоль доски вверх, $\vec{T}_A$ — вдоль доски вниз, сила тяжести $m_1\vec{g}$ и сила реакции гладкой доски $\vec{N}$, перпендикулярная доске.



Силы, действующие на кусок верёвки на доске; ось x — вдоль доски вверх

Первый закон Ньютона для куска на доске в проекции на ось x (сила $\vec{N}$ перпендикулярна оси и в проекцию не входит; сила тяжести направлена под углом $90° + \alpha$ к оси, её проекция $-m_1 g \sin\alpha$):

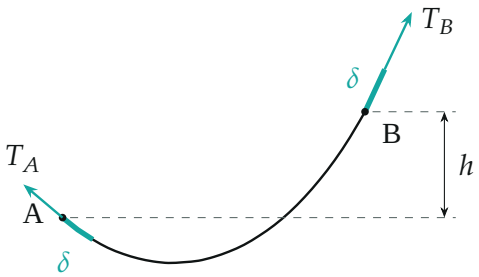
$$T_B - T_A - m_1 g \sin\alpha = 0.$$

4. Масса куска и угол. Верёвка однородна, поэтому масса пропорциональна длине: $m_1 = m\dfrac{L}{l}$. Из прямоугольного треугольника с гипотенузой AB: $\sin\alpha = \dfrac{h}{L}$. Подставляем:

$$T_B = T_A + m\frac{L}{l}g\frac{h}{L} = T_A + \frac{mgh}{l}.$$

Длина доски L сократилась — ответ не зависит от формы провисания.

Второй способ (через работу). Протянем верёвку вдоль самой себя на малую длину δ от A к B: потянем за конец B с силой T_B, а конец A отпустим на δ, удерживая его силой T_A. Форма верёвки не меняется: в итоге кусок длиной δ и массой $m\delta/l$ как будто перенесли из точки A в точку B.



Верёвку протянули на δ: кусок δ у точки A ушёл в форму, такой же кусок вышел над точкой B

Внешние силы совершили работу $T_B\delta - T_A\delta$; трения нет, кинетическая энергия не появилась, значит, вся работа ушла в потенциальную энергию куска, поднятого на h:

$$(T_B - T_A)\,\delta = \frac{m\delta}{l}g\,h \quad\Rightarrow\quad T_B = T_A + \frac{mgh}{l}.$$

Обратите внимание. Ответ не требует знать ни форму верёвки, ни углы в точках подвеса: разность натяжений в двух точках однородной висящей верёвки определяется только разностью их высот.

Ответ: $T_B = T_A + \dfrac{mgh}{l}$.

Проверка. Размерность: $\dfrac{mgh}{l}$ — кг·м/с^2 = Н. Предел $h = 0$: точки на одной высоте, натяжения равны — так и должно быть по симметрии. Знак: верхняя точка держит больше, $T_B > T_A$. Смысл: натяжение растёт с высотой на вес куска верёвки длиной h, как будто этот кусок висит вертикально.

Ответ. $T_B = T_A + \dfrac{mgh}{l}$.