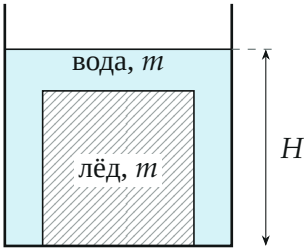
Лёд, приклеенный ко дну

Задача 4. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 9 класс, задача 4] В теплоизолированный цилиндрический сосуд опустили кусок льда при нулевой температуре и приклеили его ко дну. Затем в сосуд налили такое же (по массе) количество тёплой воды. Вода полностью покрыла лёд и достигла уровня $H = 20$ см над дном сосуда. При установлении теплового равновесия уровень воды в сосуде опустился на $\Delta h = 0{,}5$ см. Найти температуру тёплой воды. Плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3, плотность льда $\rho_1 = 0{,}9$ г/см^3, удельная теплоёмкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг·град), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^2$ кДж/кг.



Поясняющий рисунок: лёд приклеен ко дну, тёплая вода той же массы покрывает его до уровня H

▲ **Решение. Что происходит.** Тёплая вода остывает и плавит лёд. Лёд занимает больше места, чем вода той же массы, поэтому при таянии уровень опускается: по понижению уровня можно узнать, сколько льда растаяло. Сначала надо выяснить, растаял ли весь лёд, — от этого зависит конечная температура. Класс задачи — тепловой баланс с фазовым переходом плюс подсчёт объёмов.

Обозначения. m — масса льда и масса тёплой воды; t — искомая температура тёплой воды (в °C); S — площадь дна; Δm — масса растаявшего льда; ΔH — понижение уровня, если бы растаял весь лёд. Лёд приклеен ко дну и не всплывает, поэтому уровень определяется только суммой объёмов воды и льда.

1. Масса m через уровень H. В начале в сосуде вода объёмом m/ρ_0 и лёд объёмом m/ρ_1; вместе они заполняют цилиндр высотой H:

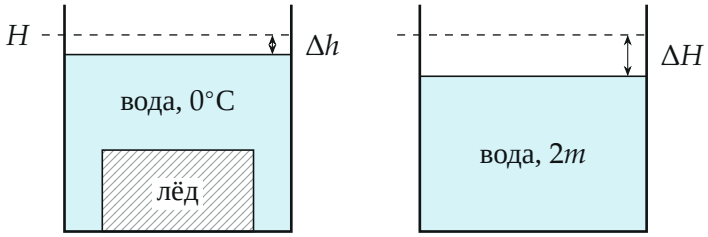
$$SH = \frac{m}{\rho_0} + \frac{m}{\rho_1} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{SH\rho_0\rho_1}{\rho_0 + \rho_1}.$$

2. На сколько опускается уровень при таянии. Когда растаяла масса Δm, объём льда уменьшился на $\Delta m/\rho_1$, а объём воды вырос на $\Delta m/\rho_0$. Суммарный объём уменьшился на

$$S\,\Delta h = \Delta m \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0}\right) = \Delta m\,\frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0\rho_1}.$$

Понижение уровня пропорционально массе растаявшего льда. Если растает весь лёд ($\Delta m = m$), уровень опустится на

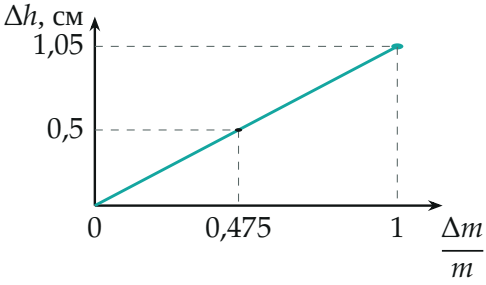
$$\Delta H = \frac{m}{S}\,\frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0\rho_1} = \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0 + \rho_1}\,H = \frac{0{,}1}{1{,}9} \cdot 20\text{ см} \approx 1{,}05\text{ см}.$$



Конечное состояние на самом деле и мысленное «весь лёд растаял»; понижения уровня показаны увеличенными в 4 раза

3. Растаял ли весь лёд. Уровень опустился на $\Delta h = 0{,}5$ см $< \Delta H \approx 1{,}05$ см. Значит, растаяла только часть льда. Лёд и вода в равновесии сосуществуют только при 0°C, поэтому конечная температура 0°C. Долю растаявшего льда даёт пропорциональность из шага 2:

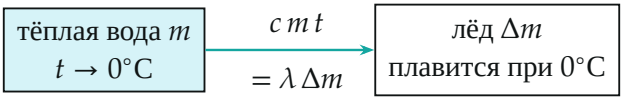
$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta h}{\Delta H} = \frac{0{,}5}{1{,}05} \approx 0{,}475.$$



Понижение уровня пропорционально доле растаявшего льда: 0,5 см соответствует 0,475 льда

4. Уравнение теплового баланса. Сосуд теплоизолирован, поэтому тепло, отданное тёплой водой при остывании от t до 0°C, целиком идёт на плавление массы Δm льда (лёд уже при 0°C, нагревать его не нужно):

$$c\,m\,t = \lambda\,\Delta m.$$



Тепловой баланс: тепло остывающей воды уходит на плавление части льда

5. Ответ. Из баланса $t = \dfrac{\lambda}{c}\dfrac{\Delta m}{m}$. Подставляем долю из шага 3 вместе с выражением для ΔH:

$$t = \frac{\lambda}{c}\frac{\Delta h}{\Delta H} = \frac{\lambda}{c}\frac{\Delta h}{H}\frac{\rho_0+\rho_1}{\rho_0-\rho_1} = \frac{330}{4{,}2}\cdot\frac{0{,}5}{20}\cdot\frac{1{,}9}{0{,}1}\,\text{K} \approx 78{,}6\cdot 0{,}025\cdot 19\,\text{K} \approx 37^\circ\text{C}.$$

У организаторов в ответе 33,9°C: это значение получается при $\lambda = 3{,}0\cdot 10^2$ кДж/кг, а при данном в условии $\lambda = 3{,}3\cdot 10^2$ кДж/кг формула даёт 37°C.

Обратите внимание. Начинать с теплового баланса «вода остывает до θ» нельзя: сначала нужно проверить, весь ли лёд растаял. Здесь не весь, поэтому конечная температура известна заранее — 0°C.

Проверка. Размерность: λ/c — (Дж/кг)/(Дж/(кг·K)) = K, остальные множители безразмерны. Предел: если бы растаял весь лёд ($\Delta h = \Delta H$),

вода должна была бы иметь $t = \lambda/c \approx 79°\text{C}$ — ровно столько тепла нужно, чтобы расплавить лёд той же массы; у нас растаяла меньше половины, и 37°C меньше половины от 79°C. Смысл: доля растаявшего льда равна отношению ct к λ, а её «показывает» уровень воды.

Ответ. $t = \dfrac{\lambda}{c}\,\dfrac{\Delta h}{H}\,\dfrac{\rho_0+\rho_1}{\rho_0-\rho_1} \approx 37°\text{C}$.