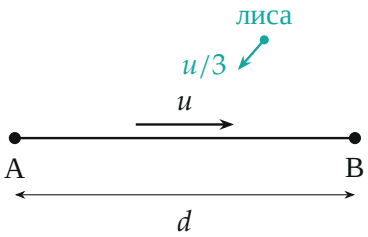
Лиса и суслик

Задача 5. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 9 класс, задача 5] Лиса пытается поймать суслика, который перебегает из норки A в норку B, находящиеся на расстоянии d друг от друга. Скорость лисы в три раза меньше скорости суслика. При этом суслик дразнит лису. Он по вибрации почвы чувствует, где находится лиса, и стартует только в том случае, когда лиса не может поймать его. По возможности точно нарисуйте область, находясь в которой лиса сможет поймать суслика, обоснуйте ваше построение и определите площадь этой области.



Поясняющий рисунок: суслик бежит по прямой из A в B со скоростью u, лиса — со скоростью $u/3$

▲ **Решение.** **Что происходит.** Суслик бежит по прямой AB. Лиса ловит его, если успевает оказаться в какой-нибудь точке его пути не позже суслика. Главная идея — строить область «наоборот»: для каждой точки пути суслика найти, откуда лиса успевает в неё прибежать, а потом объединить эти места по всем точкам пути. Класс задачи — кинематика равномерного движения с геометрическим построением.

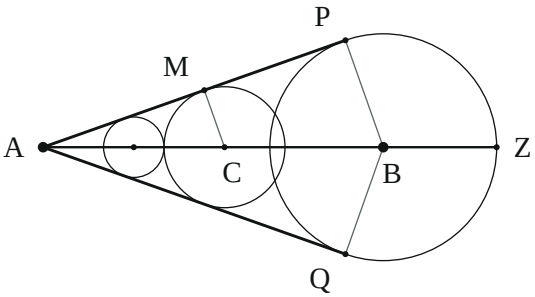
Обозначения. u — скорость суслика, $u/3$ — скорость лисы; C — произвольная точка отрезка AB; t — время бега суслика от A до C, $AC = ut$; α — угол между AB и касательной из точки A к кругам (найдём его ниже).

1. Откуда лиса успевает в точку C. Суслик стартует из норки A и окажется в точке C через время $t = AC/u$. Лиса бежит к C по прямой (это кратчайший путь) и за то же время пробежит $\frac{u}{3}t = \frac{AC}{3}$. Значит, лиса ловит суслика в точке C, если в момент старта она находится внутри

круга с центром C и радиусом

$$r_C = \frac{AC}{3}.$$

Искомая область — объединение всех таких кругов, когда C пробегает отрезок от A до B. В точке A радиус нулевой, у норки B — самый большой, $d/3$.



Круги, из которых лиса успевает в точку пути суслика: все касаются двух прямых AP и AQ

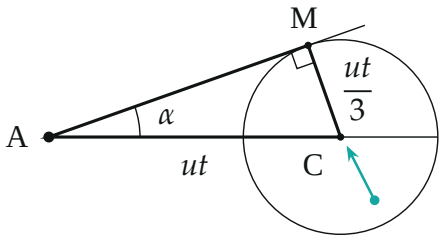
2. Касательные ко всем кругам — одни и те же две прямые. Проведём из A касательную к кругу с центром C; M — точка касания. Радиус в точку касания перпендикулярен касательной, поэтому треугольник AMC прямоугольный, и

$$\sin \angle MAC = \frac{CM}{AC} = \frac{AC/3}{AC} = \frac{1}{3}.$$

Угол не зависит от выбора точки C: все прямоугольные треугольники с катетом, втрое меньшим гипотенузы, подобны. Значит, касательные из A ко всем кругам совпадают — это две прямые AP и AQ под углом

$$\alpha = \arcsin\frac{1}{3} \approx 19{,}5^\circ$$

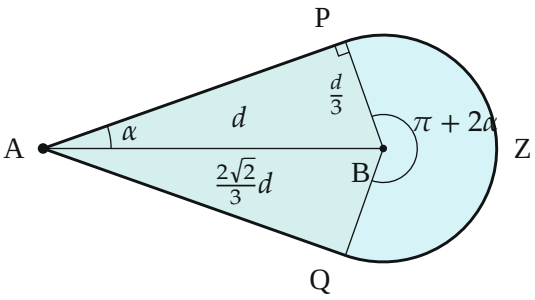
к отрезку AB по разные стороны от него. Каждый круг лежит внутри угла PAQ и касается обеих его сторон.



Прямоугольный треугольник AMC: катет CM втрое меньше гипотенузы AC; лиса внутри круга успевает в C

3. Граница области. Объединение кругов состоит из двух частей. Пока C идёт от A к B, круги растут и заполняют внутренность угла PAQ вплоть до отрезков касательных AP и AQ (P и Q — точки касания с самым большим кругом, у норки B). Дальше B кругов нет, поэтому за отрезком PQ область кончается дугой PZQ самого большого круга (с центром B и радиусом $d/3$). Итог: область ограничена отрезками AP, AQ и большой дугой PZQ.

4. Площадь. Разрежем область отрезками BP и BQ на два треугольника ABP, ABQ и круговой сектор PBQZ.



Область, откуда лиса ловит суслика: два прямоугольных треугольника и сектор радиуса $d/3$ с углом $\pi + 2\alpha$

Треугольники. В прямоугольном треугольнике ABP (прямой угол при P) гипотенуза $AB = d$, катет $BP = d/3$. По теореме Пифагора второй

катет $AP = \sqrt{d^2 - d^2/9} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\,d$. Площадь одного треугольника

$$S_{ABP} = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}\,d}{3} = \frac{\sqrt{2}\,d^2}{9},$$

у треугольника ABQ такая же.

Сектор. В треугольнике ABP угол при B равен $\angle ABP = 90^\circ - \alpha$, так же $\angle ABQ = 90^\circ - \alpha$. Угол PBQ, обращённый к A, равен $\pi - 2\alpha$, а сектору PBQZ остаётся угол

$$\varphi = 2\pi - (\pi - 2\alpha) = \pi + 2\alpha \approx 219^\circ.$$

Площадь сектора радиуса $d/3$ с углом φ (в радианах):

$$S_{\text{сект}} = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{3}\right)^2\varphi = \left(\pi + 2\arcsin\frac{1}{3}\right)\frac{d^2}{18}.$$

Вся площадь:

$$S = 2S_{ABP} + S_{\text{сект}} = \frac{2\sqrt{2}\,d^2}{9} + \left(\pi + 2\arcsin\frac{1}{3}\right)\frac{d^2}{18}$$
$$\approx (0{,}314 + 0{,}212)\,d^2 \approx 0{,}53\,d^2.$$

У организаторов в ответе сектору приписан угол $2\pi - 2\arcsin\frac{1}{3}$ (вырезанный угол PBQ принят равным $2\arcsin\frac{1}{3}$ — это угол при вершине A, а не при B), отсюда их $S \approx 0{,}63\,d^2$.

Обратите внимание. Вырезанный из круга угол PBQ — тупой ($\approx 141^\circ$), а не острый угол $2\alpha \approx 39^\circ$ при вершине A: углы при A и при B в треугольнике ABP дополняют друг друга до 90°.

Проверка. Размерность: d^2 — площадь. Независимо площадь проверена численно: точки плоскости брались случайно, и для каждой проверялось, есть ли точка C на AB, до которой лиса бежит не дольше суслика; доля «пойманных» точек дала $S \approx 0{,}527\,d^2$, как и формула. Оценка снизу: область содержит круг радиуса $d/3$ ($\approx 0{,}35\,d^2$) и ещё «клин» к

точке A — полученные $0{,}53\,d^2$ разумны. Смысл: чем ближе лиса к норке A, тем меньше у неё шансов — суслик стартует раньше, чем она успеет добежать.

Ответ. Область ограничена отрезками касательных AP и AQ, проведённых из A под углом $\alpha = \arcsin\frac{1}{3}$ к AB, и большой дугой PZQ окружности радиуса $d/3$ с центром B; её площадь $S = \dfrac{2\sqrt{2}\,d^2}{9} + \left(\pi + 2\arcsin\dfrac{1}{3}\right)\dfrac{d^2}{18} \approx 0{,}53\,d^2$.