Вольтметр и резистор: два включения

Задача 2. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 10 класс, задача 2] «Вольтметр и резистор: два включения».

Вольтметр и резистор соединяют сначала параллельно и подключают к источнику электрического напряжения (см. левый рисунок). А потом их соединяют последовательно и подключают к тому же источнику электрического напряжения (см. правый рисунок). При этом показания вольтметра отличаются в три раза. Найти отношение сопротивления резистора к сопротивлению вольтметра. Напряжение, приложенное к цепи, не менялось.

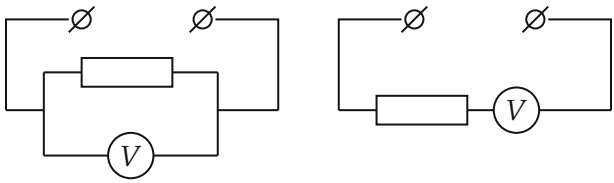
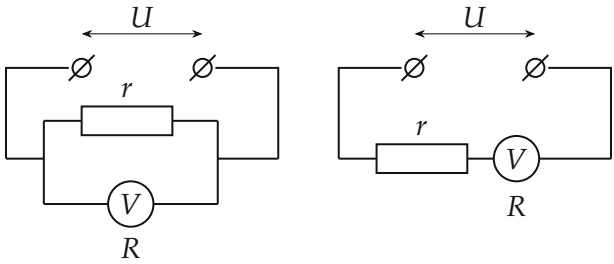


Рисунок условия: слева — параллельное включение, справа — последовательное

▲ **Решение.** **Что происходит.** Вольтметр — прибор с конечным сопротивлением, и показывает он напряжение на своих зажимах. В первом включении его зажимы подсоединены прямо к источнику, поэтому он показывает полное напряжение. Во втором включении вольтметр стоит последовательно с резистором: через них течёт один и тот же ток, и напряжение источника делится между ними пропорционально сопротивлениям (делитель напряжения). Вольтметру достаётся только часть напряжения — меньшая, чем в первом случае. Условие «показания отличаются в три раза» задаёт, какая именно это часть.

Обозначения. U — напряжение, приложенное к цепи (одно и то же в обоих случаях), R — сопротивление вольтметра, r — сопротивление резистора, U_1 и U_2 — показания вольтметра в первом и втором случае.



Слева вольтметр подключён к источнику непосредственно. Справа ток I идёт через резистор и вольтметр по очереди

1. Первое включение: параллельно. Вольтметр подключён к тем же зажимам источника, что и резистор, и показывает напряжение между зажимами. Источник держит это напряжение неизменным, как сказано в условии, значит

$$U_1 = U.$$

Ток через резистор в этом случае на показание вольтметра не влияет.

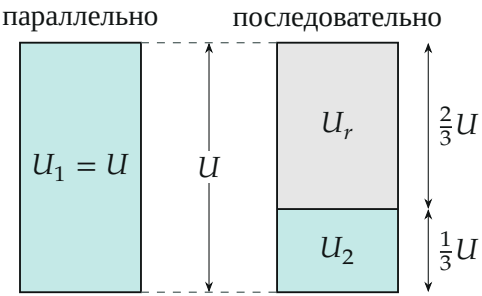
2. Второе включение: последовательно. Закон Ома для всей цепи: ток один и тот же через резистор и вольтметр, сопротивления складываются:

$$I = \frac{U}{r + R}.$$

Вольтметр показывает напряжение на себе, то есть закон Ома для его участка:

$$U_2 = IR = \frac{UR}{r + R} = \frac{U}{1 + r/R}.$$

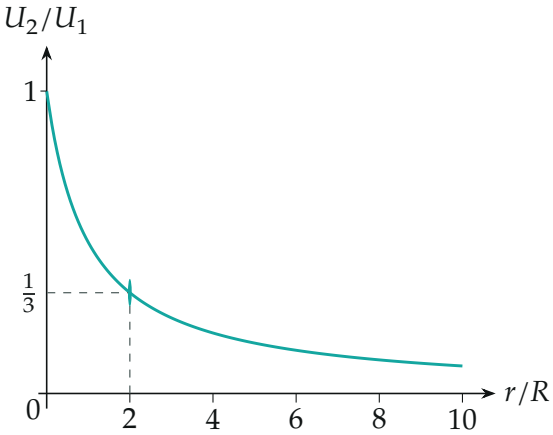
Обратите внимание: $U_2 < U_1$ всегда. В цепи появился резистор, часть напряжения упала на нём, и вольтметру досталось меньше. Поэтому «отличаются в три раза» означает $U_2 = U_1/3$, а не наоборот: при $U_2 = 3U_1$ получилось бы $r/R = -\frac{2}{3} < 0$, что невозможно.



Что показывает вольтметр: слева всё напряжение U, справа — только его часть на вольтметре; остальное падает на резисторе

3. Использование условия. Показание во втором случае втрое меньше:

$$U_2 = \frac{U_1}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{U}{1 + r/R} = \frac{U}{3} \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{r}{R} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{R} = 2.$$



Отношение показаний во втором и первом случае как функция r/R: значение $\frac{1}{3}$ достигается при $r/R = 2$

Проверка. Размерность: r/R — отношение сопротивлений, безразмерно. Предельные случаи: при $r \to 0$ (резистора нет) $U_2 \to U_1$, показания совпадают; при $r \to \infty$ ток почти не идёт и $U_2 \to 0$ — график идёт

от 1 к 0 и проходит через $\frac{1}{3}$ в единственной точке $r/R = 2$. Второй способ — делитель напряжения: сумма напряжений на последовательных элементах $U_r + U_2 = U$, а при одном токе они относятся как сопротивления, $U_r : U_2 = r : R$. Если $U_2 = U/3$, то $U_r = \frac{2}{3}U$, и $r : R = 2 : 1$. Числа: при $R = 1$ кОм, $r = 2$ кОм и $U = 9$ В вольтметр показывает 9 В и 3 В.

Смысл: вольтметр, включённый последовательно с резистором вдвое большего сопротивления, получает ровно треть напряжения источника.

Ответ. $\frac{r}{R} = 2$, где r — сопротивление резистора, R — сопротивление вольтметра.