Тело на клине под действием силы

Задача 3. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 10 класс, задача 3] «Тело на клине под действием силы».

Тело массой m положили на наклонную грань клина массой $2m$ с углом при основании $\alpha = 30°$. На тело действуют некоторой силой F, направленной параллельно наклонной грани клина (см. рисунок). Какой должна быть эта сила, чтобы ускорение тела было направлено горизонтально? Трением между всеми поверхностями можно пренебречь.

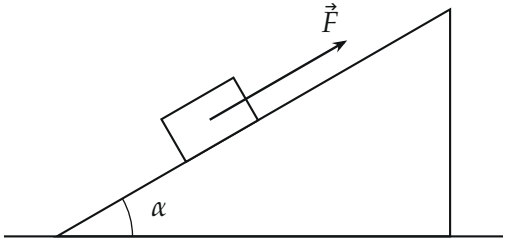


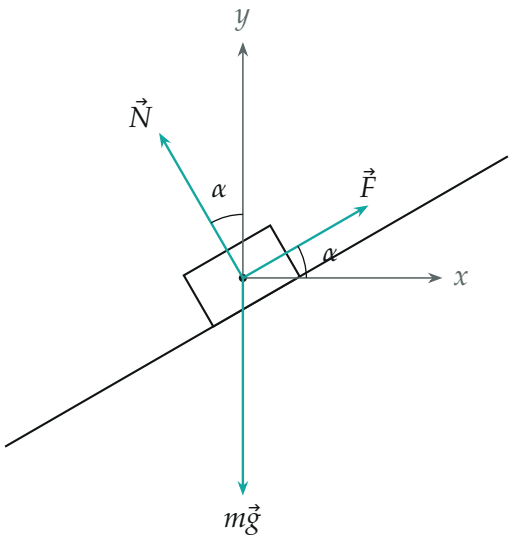
Рисунок условия: сила $\vec{F}$ направлена вдоль наклонной грани вверх

▲ **Решение. Что происходит.** Клин лежит на гладком полу и может двигаться только по горизонтали. Если бы тело скользило по грани, у него была бы вертикальная составляющая скорости относительно клина, а у клина вертикальной скорости нет. По условию ускорение тела горизонтально, значит, тело не скользит: оно едет вместе с клином, и у обоих одно горизонтальное ускорение a. Остаётся записать второй закон Ньютона для тела и для клина: неизвестных три — F, нормальная реакция N и a.

Обозначения. Ось x — горизонтально вправо, ось y — вертикально вверх. $\vec{N}$ — сила, действующая на тело со стороны клина (перпендикулярно грани), $\vec{N}'$ — сила, действующая на клин со стороны тела, $N' = N$ по третьему закону Ньютона. $\vec{N}_1$ — сила реакции пола на клин (вертикальная).

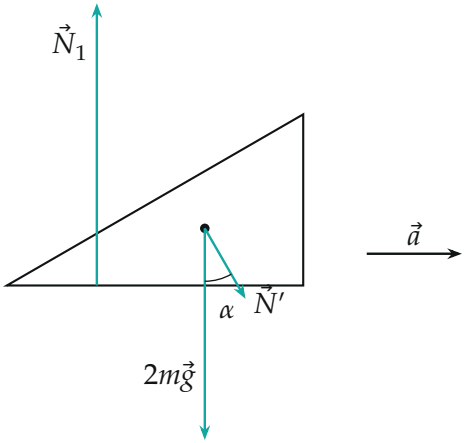
1. Силы, действующие на тело. Сила тяжести $m\vec{g}$ вниз, нормальная реакция $\vec{N}$ перпендикулярно грани (вверх и влево), внешняя сила $\vec{F}$ вдоль грани вверх и вправо. Она составляет с осью x угол α, а нормаль

— такой же угол α с осью y (стороны этих углов взаимно перпендикулярны).



Силы на тело (длины стрелок для найденного ответа: $F = \frac{2}{3}mg$, $N \approx 0{,}77\,mg$)

2. Силы на клин. На клин действуют: тяжесть $2m\vec{g}$, давление тела $\vec{N}'$ (перпендикулярно грани внутрь клина, вниз и вправо), реакция пола $\vec{N}_1$ вертикально вверх. Горизонтальная составляющая у $\vec{N}'$ одна, равная $N\sin\alpha$ вправо, — больше горизонтальных сил на клин нет (пол гладкий).



Силы на клин показаны от его центра масс; справа — ускорение клина (масштаб стрелки $\vec{a}$ свой)

3. Второй закон Ньютона. Для клина по горизонтали (зачем эта проекция: из вертикальных сил на клин нужна только N_1, а она нам не нужна):

$$2ma = N\sin\alpha.$$

Для тела по горизонтали и по вертикали (ускорение тела горизонтально, $a_y = 0$):

$$ma = F\cos\alpha - N\sin\alpha, \qquad 0 = F\sin\alpha + N\cos\alpha - mg.$$

Три уравнения, неизвестные F, N, a. Подставим $N\sin\alpha = 2ma$ в уравнение тела по горизонтали: $ma = F\cos\alpha - 2ma$, откуда

$$a = \frac{F\cos\alpha}{3m}, \qquad N = \frac{2ma}{\sin\alpha} = \frac{2F\cos\alpha}{3\sin\alpha}.$$

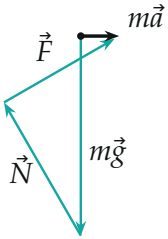
(То же даёт система «тело + клин»: по горизонтали на неё действует только $F\cos\alpha$, масса $3m$.) Подставим N в вертикальное уравнение:

$$mg = F\sin\alpha + \frac{2F\cos^2\alpha}{3\sin\alpha} = F\,\frac{3\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{3\sin\alpha} = F\,\frac{2+\sin^2\alpha}{3\sin\alpha},$$

$$F = \frac{3mg\sin\alpha}{2+\sin^2\alpha}.$$

При $\alpha = 30^\circ$ имеем $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin^2\alpha = \frac{1}{4}$:

$$F = \frac{3 \cdot 0{,}5}{2{,}25}\, mg = \frac{2}{3}\, mg.$$



Сумма трёх сил: $m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F} = m\vec{a}$ — замкнутая цепочка, итог горизонтален, как и требует условие

4. Второй способ. Перейдём в систему отсчёта клина: она движется с ускорением a вправо, и тело покоится в ней. На тело добавляется сила инерции $-m\vec{a}$ (влево). Вдоль грани (направление вверх по склону) сумма сил равна нулю:

$$F - mg\sin\alpha - ma\cos\alpha = 0.$$

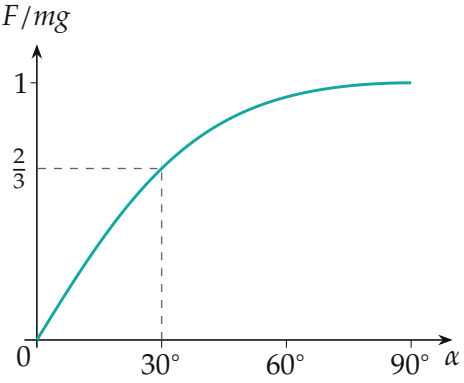
Подставим $a = \dfrac{F\cos\alpha}{3m}$:

$$F\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{3}\right) = mg\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad F = \frac{3mg\sin\alpha}{3 - \cos^2\alpha} = \frac{3mg\sin\alpha}{2 + \sin^2\alpha}$$

— тот же результат. Остальные величины для $\alpha = 30^\circ$:

$$N = \frac{2F\cos\alpha}{3\sin\alpha} = \frac{4\sqrt{3}}{9}\, mg \approx 0{,}77\, mg > 0,$$
$$a = \frac{F\cos\alpha}{3m} = \frac{\sqrt{3}}{9}\, g \approx 0{,}19\, g.$$

Так как $N > 0$, тело действительно остаётся на грани.



Нужная сила в зависимости от угла: при $\alpha = 30°$ она равна $\frac{2}{3}mg$

Проверка. Размерность: mg — сила, остальное безразмерно. Подставим найденные $F = \frac{2}{3}mg$, $N = \frac{4\sqrt{3}}{9}mg$ в исходные уравнения:

$$F\sin\alpha + N\cos\alpha = \frac{1}{3}mg + \frac{2}{3}mg = mg,$$

$$ma = F\cos\alpha - N\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{9}\,mg = \frac{1}{2}\,N\sin\alpha.$$

Вертикаль сходится, а горизонтальные уравнения тела и клина дают одно и то же a. Пределы: при $\alpha \to 90°$ грань вертикальна, сила вертикальна, и $F \to mg$ ($N \to 0$, $a \to 0$): сила просто держит тело. При $\alpha \to 0$ грань горизонтальна, и $F \to 0$: тело и без силы лежит неподвижно.

Обратите внимание: $N \neq mg\cos\alpha$. Сила F тоже разгружает грань, и ускорение a входит в горизонтальное уравнение — нормальная реакция находится только из системы.

Смысл: при $30°$ сила $\frac{2}{3}mg$ заставляет тело ехать вместе с клином.

Ответ. $F = \dfrac{3mg\sin\alpha}{2+\sin^2\alpha} = \dfrac{2}{3}\,mg.$