Шарики на изогнутом стержне

Задача 4. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 10 класс, задача 4] «Шарики на изогнутом стержне».

Два шарика одинаковой массы m закреплены на концах лёгкого стержня длиной $2L$, согнутого в середине под прямым углом (см. рисунок). Через вершину этого угла перпендикулярно плоскости чертежа проходит горизонтальная ось вращения. Стержень удерживают так, что одна его часть горизонтальна, вторая вертикальна, а потом отпускают. Найти максимальную скорость шариков в процессе последующего движения. Силой сопротивления воздуха и другими неупругими процессами пренебречь.

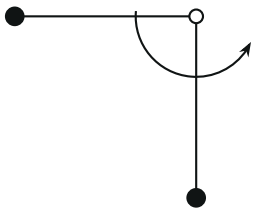


Рисунок условия: начальное положение стержня, стрелка показывает направление вращения

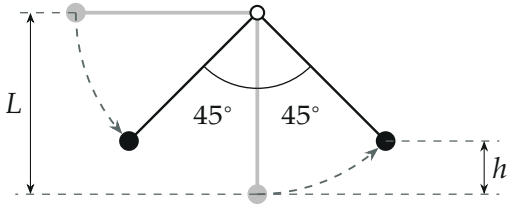
▲ **Решение. Что происходит.** Стержень лёгкий и жёсткий, поэтому оба шарика движутся по окружностям радиуса L вокруг оси с одной угловой скоростью, и их скорости всё время равны по модулю: $v = \omega L$. Трения нет, энергия системы сохраняется, и обычное правило даёт ответ: скорость наибольшая там, где потенциальная энергия наименьшая, то есть в положении равновесия. Положение равновесия найдём из условия, что центр масс системы расположен как можно ниже, потом посчитаем, на сколько опустились шарики, и приравняем убыль потенциальной энергии кинетической.

Обозначения. O — ось; нулевой уровень потенциальной энергии — на уровне O. φ — угол поворота стержня от начального положения (против часовой стрелки, как показано на рисунке). v — скорость шариков в положении равновесия.

1. Положение равновесия. Центр масс двух одинаковых шариков — середина отрезка между ними. Это середина гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами L (расстояния от O до шариков), её расстояние до O равно половине гипотенузы:

$$d = \frac{1}{2}\sqrt{L^2 + L^2} = \frac{L}{\sqrt{2}}.$$

Потенциальная энергия системы $U = 2mg\,y_c$ тем меньше, чем ниже центр масс y_c. При вращении центр масс движется по окружности радиуса d вокруг O и лежит ниже всего, когда он строго под осью, $y_c = -d$. В этом положении отрезок между шариками горизонтален, а стержни симметричны относительно вертикали и составляют с ней углы 45°.



Серым — начальное положение, чёрным — положение равновесия. Пунктир — путь шариков; левый шарик опустился от уровня оси, нижний поднялся

2. Скорость шариков в положении равновесия. Запишем закон сохранения механической энергии для системы двух шариков между начальным положением и положением равновесия (скорость вначале нулевая, неупругих процессов нет, ось сил не совершает работы — сила реакции оси приложена в неподвижной точке).

Начальная потенциальная энергия: левый шарик на уровне оси ($y = 0$), нижний на $y = -L$:

$$U_0 = mg \cdot 0 + mg\,(-L) = -mgL.$$

В равновесии оба шарика на глубине $L\cos 45^\circ = \dfrac{L}{\sqrt{2}}$ под осью:

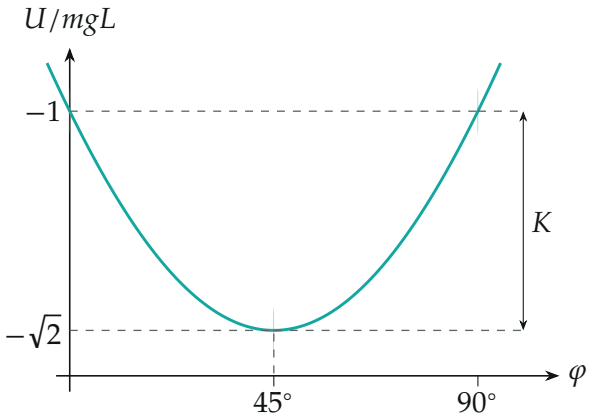
$$U_1 = 2 \cdot mg\left(-\frac{L}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}\,mgL.$$

Убыль потенциальной энергии:

$$U_0 - U_1 = mgL\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

Она переходит в кинетическую энергию двух шариков с одинаковыми скоростями v:

$$2 \cdot \frac{mv^2}{2} = mgL\left(\sqrt{2} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gL\left(\sqrt{2} - 1\right)}.$$

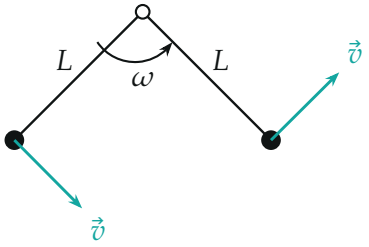


Потенциальная энергия от угла φ (в единицах mgL): минимум в равновесии, на 90° энергия снова начальная, система качается между 0 и 90°; разность уровней — K

3. Почему именно здесь максимум. Кинетическая энергия $K = U_0 - U(\varphi)$ наибольшая там, где потенциальная энергия U наименьшая. Для угла поворота φ высоты шариков — $-L\sin\varphi$ (левый) и $-L\cos\varphi$ (нижний), поэтому

$$U(\varphi) = -mgL\left(\sin\varphi + \cos\varphi\right),$$

и минимум достигается при $\sin\varphi = \cos\varphi$, то есть при $\varphi = 45°$ (график выше). Это то же равновесие, что нашли через центр масс.



Скорости шариков в положении равновесия: каждая направлена перпендикулярно своему стержню, модули равны, $v = \omega L$

Проверка. Размерность: gL — квадрат скорости, верно. Второй способ — работа момента силы тяжести. Относительно оси момент равен $M(\varphi) = mgL(\cos\varphi - \sin\varphi)$ (он положителен, пока $\varphi < 45°$, и нулевой в равновесии). Работа за поворот на 45°:

$$A = \int_0^{\pi/4} mgL(\cos\varphi - \sin\varphi)\,d\varphi$$
$$= mgL\,[\sin\varphi + \cos\varphi]_0^{\pi/4} = mgL\left(\sqrt{2} - 1\right),$$

то же значение, что убыль потенциальной энергии. Числа: $g = 9{,}8$ м/с^2, $L = 1$ м дают $v = \sqrt{9{,}8 \cdot 0{,}414} \approx 2{,}0$ м/с.

Обратите внимание: скорость наибольшая не там, где один из стержней снова оказался вертикальным. В начале и при повороте на 90° (один стержень вертикален, второй горизонтален) энергия та же, что была вначале, и скорость равна нулю; наибольшая скорость — при проходе через равновесие, на полпути.

Смысл: система качается вокруг равновесия, и скорость максимальна в самом низком положении центра масс.

Ответ. $v = \sqrt{gL\left(\sqrt{2} - 1\right)} \approx 0{,}64\sqrt{gL}$.