Тело на нити и лунка

Задача 5. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 10 класс, задача 5] «Тело на нити и лунка».

В точке A, находящейся на горизонтальной поверхности, закреплён конец лёгкой упругой нерастяжимой нити длиной l. Второй конец нити прикреплён к точечному массивному телу. В начальный момент нить натянута, тело находится в точке B. На той же поверхности на прямой, являющейся продолжением начального положения нити, на расстоянии $l/2$ от точки A сделана небольшая лунка (см. рисунок, вид сверху; лунка находится в точке C). Под каким углом α к начальному положению нити нужно толкнуть тело, чтобы оно попало в лунку, натянув нить один раз (не считая начального положения)? Трение отсутствует. Ненатянутая нить сопротивления движению тела не оказывает.

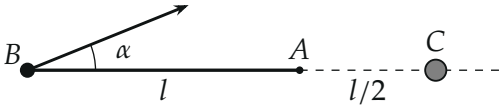
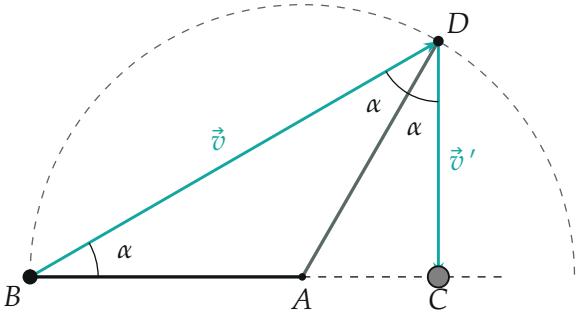


Рисунок условия: вид сверху; тело в точке B, нить BA натянута, лунка в точке C

▲ **Решение. Что происходит.** Пока тело движется внутри круга радиуса l с центром A, нить провисает и никак не влияет на него: тело летит по прямой с постоянной скоростью. Нить натянется снова, когда расстояние от тела до A опять станет равно l — в некоторой точке D на этом круге. На короткое время появится сила натяжения. Она направлена вдоль нити и меняет только составляющую скорости вдоль нити; нить упругая, поэтому эта составляющая меняет знак, а составляющая поперёк нити не меняется. После этого тело снова летит по прямой, и эта прямая должна пройти через лунку C. Это даст уравнение для угла α.

Обозначения. α — угол между направлением толчка и начальным положением нити BA. D — точка, где нить натягивается. $\vec{v}$ и $\vec{v}\,'$ — скорость тела до и после натяжения нити. Рассматриваем толчок вперёд, то есть $0 < \alpha < 90°$.

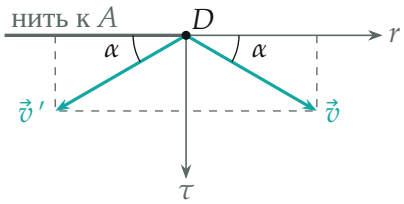


Путь тела: прямая BD после толчка, натяжение нити в точке D, прямая DC в лунку (на рисунке $\alpha = 30°$). Дуга — круг радиуса l

1. Где нить натянется. Нить провисла, пока $AD < l$, и натягивается, когда расстояние до A снова равно l. Значит, $AD = AB = l$: треугольник ABD равнобедренный, и углы при основании равны:

$$\angle ABD = \angle BDA = \alpha, \qquad \angle BAD = 180° - 2\alpha.$$

2. Что делает нить. В момент натяжения сила направлена вдоль нити DA. Разложим скорость $\vec{v}$ на составляющую вдоль нити и составляющую поперёк. Вдоль нити сила меняет скорость, поперёк — нет, поэтому поперечная составляющая сохраняется. Нить упругая: механическая энергия не теряется, $|\vec{v}\,'| = |\vec{v}|$, значит, продольная составляющая меняет знак.



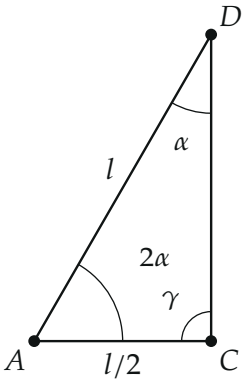
Скорость в точке D до натяжения ($\vec{v}$) и после ($\vec{v}\,'$): ось r — вдоль нити от A, ось τ — поперёк. Поперечные составляющие равны, продольные — противоположны, углы с нитью одинаковы

Для составляющих по осям r (вдоль нити от A) и τ (поперёк) имеем $v'_r = -v_r$, $v'_\tau = v_\tau$, то есть $\vec{v}\,'$ — зеркальное отражение $\vec{v}$ относительно

оси τ. Поэтому угол между $\vec{v}$ и осью r равен углу между $\vec{v}\,'$ и нитью DA (осью $-r$), оба равны α: скорость $\vec{v}$ направлена вдоль $B \to D$, и угол между DB и нитью DA равен $\angle BDA = \alpha$. Значит, после натяжения прямая DC образует с нитью тот же угол: $\angle ADC = \alpha$. Тело отскакивает от нити, как луч от зеркала.

3. Условие попадания в лунку. Точки B, A, C лежат на одной прямой, A между B и C. Угол $\angle BAD = 180^\circ - 2\alpha$ смежный с $\angle DAC$, поэтому

$$\angle DAC = 2\alpha, \qquad \angle ADC = \alpha, \qquad \angle ACD = 180^\circ - 3\alpha.$$



Треугольник ACD: $\gamma = 180^\circ - 3\alpha$; сторона $AD = l$ лежит напротив угла γ, сторона $AC = l/2$ — напротив угла α (рисунок для $\alpha = 30^\circ$)

Запишем теорему синусов для треугольника ACD: каждая сторона относится к синусу противолежащего угла одинаково, $AD/\sin\gamma = AC/\sin\alpha$:

$$\frac{l}{\sin(180^\circ - 3\alpha)} = \frac{l/2}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad \sin 3\alpha = 2\sin\alpha.$$

4. Решение уравнения. Распишем синус тройного угла: $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$. Тогда

$$3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 2\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha\,(1 - 4\sin^2\alpha) = 0.$$

Корень $\sin\alpha = 0$ (толчок вдоль нити) не годится: тело вообще не уходит с прямой BA и не натягивает нить. Остаётся $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, то есть при $0 < \alpha < 90°$

$$\alpha = 30°.$$

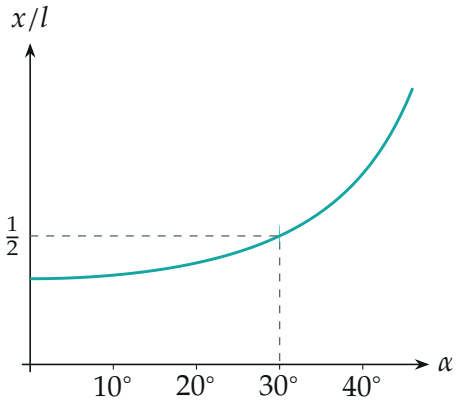
Тогда $\angle ACD = 180° - 90° = 90°$: прямая DC перпендикулярна оси, и тело, отразившись от нити, идёт строго вниз по рисунку — в лунку.

Обратите внимание: нить упругая, поэтому продольная составляющая скорости *меняет знак*, а не обращается в нуль. Если бы нить гасила её (неупругая), тело дальше шло бы по окружности вокруг A, и задача была бы другой.

5. Второй способ: через координаты. Поместим начало в A, ось x — вдоль BA, длину l примем за единицу. Тогда $D = (\cos 2\alpha;\ \sin 2\alpha)$. Прямая DC идёт под углом $180° + 3\alpha$ к оси x (угол $ADC = \alpha$ добавляется к направлению DA, которое равно $180° + 2\alpha$). Она пересекает ось в точке

$$x = \cos 2\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}\cos 3\alpha = \frac{\sin(3\alpha - 2\alpha)}{\sin 3\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{1}{3 - 4\sin^2\alpha}.$$

Лунка в точке $x = \frac{1}{2}$: $3 - 4\sin^2\alpha = 2$, $\sin^2\alpha = \frac{1}{4}$ — тот же результат.



Где прямая после натяжения пересекает ось BA (в долях l) в зависимости от угла толчка: значение $\frac{1}{2}$ достигается ровно при $\alpha = 30°$ (функция возрастает, корень единственный)

Проверка. Размерность: углы безразмерны, l сократилось. Скорость по модулю не меняется ($|\vec{v}\,'| = |\vec{v}|$): после натяжения тело движется строго вниз, и при $\alpha = 30^\circ$ в осях пункта 5 имеем $\vec{v} = (\cos 30^\circ; \sin 30^\circ)$, $\vec{v}\,' = (0; -1)$ — оба по модулю равны единице. Функция $x(\alpha) = 1/(3 - 4\sin^2\alpha)$ растёт при $0 < \alpha < 60^\circ$ от $\frac{1}{3}$, значит, значение $\frac{1}{2}$ достигается лишь при одном угле. Путь DC целиком лежит внутри круга радиуса l ($AC = \frac{l}{2} < l$), так что нить не натягивается второй раз.

Смысл: после рывка тело идёт, как луч после отражения от зеркала, поэтому «прицелиться» в лунку можно, подобрав угол толчка.

Ответ. $\alpha = 30^\circ$.