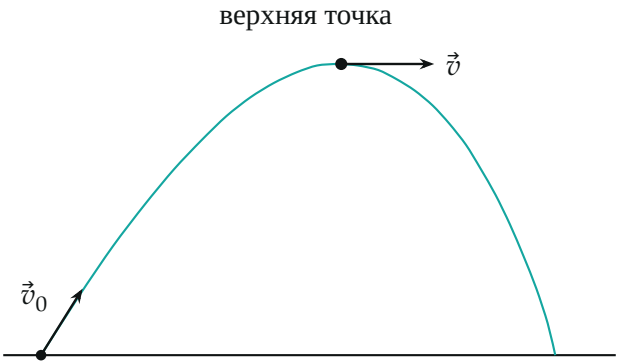
Ускорение в верхней точке траектории

Задача 1. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 10 класс, задача 1] «Ускорение в верхней точке траектории».

Тело массой m, брошенное под углом к горизонту, имеет в верхней точке траектории ускорение $a = \dfrac{4g}{3}$ (g — ускорение свободного падения). Определить силу сопротивления воздуха в этой точке и направление вектора ускорения тела.

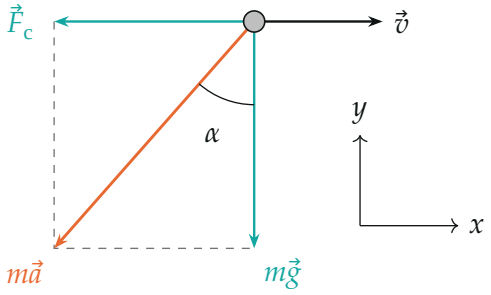


Поясняющий рисунок (в оригинале условия рисунка нет): тело брошено под углом к горизонту, воздух тормозит его, траектория несимметрична. В верхней точке скорость горизонтальна.

▲ **Решение. Что происходит.** Без воздуха ускорение в любой точке полёта было бы равно g и смотрело вертикально вниз. Здесь оно больше: $\frac{4}{3}g > g$. Значит, помимо силы тяжести на тело действует ещё одна сила — сопротивление воздуха. Главная идея: в верхней точке вертикальная составляющая скорости равна нулю, скорость горизонтальна, и сила сопротивления (она направлена против скорости) тоже горизонтальна, то есть перпендикулярна силе тяжести. Две перпендикулярные силы складываются по теореме Пифагора.

Обозначения. Ось x — по горизонтали в сторону полёта, ось y — вертикально вверх. $\vec{v}$ — скорость в верхней точке, $\vec{F}_\text{с}$ — сила сопротивления воздуха, α — угол между вектором ускорения и вертикалью. Воздух считаем неподвижным.

1. Куда направлена сила сопротивления. Сила сопротивления направлена против скорости тела относительно воздуха. В верхней точке $v_y = 0$, значит, вектор $\vec{v}$ горизонтален, а $\vec{F}_\text{с}$ направлена горизонтально назад, против оси x. Поэтому в этой точке на тело действуют ровно две силы — $m\vec{g}$ вниз и $\vec{F}_\text{с}$ назад (рисунок ниже).



Верхняя точка траектории: силы $m\vec{g}$ и $\vec{F}_\text{с}$ перпендикулярны, их равнодействующая — $m\vec{a}$. Длины стрелок — в масштабе для $a = \frac{4}{3}g$

2. Второй закон Ньютона. Запишем его для тела в верхней точке векторно:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_\text{с}.$$

В проекциях на оси: $ma_x = -F_\text{с}$, $ma_y = -mg$. Вертикальная составляющая ускорения равна ровно g (сопротивление в этой точке по вертикали не действует), а лишнее ускорение — горизонтальное: $a_x = -F_\text{с}/m$. Модуль ускорения:

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 = g^2 + \left(\frac{F_\text{с}}{m}\right)^2.$$

3. Сила сопротивления. Выразим её и подставим $a = \frac{4}{3}g$:

$$F_\text{с} = m\sqrt{a^2 - g^2} = mg\sqrt{\frac{16}{9} - 1} = \frac{\sqrt{7}}{3}\,mg \approx 0{,}88\,mg.$$

4. Направление ускорения. Вектор $m\vec{a}$ — гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами mg и $F_\text{с}$. Угол α между гипотенузой и верти-

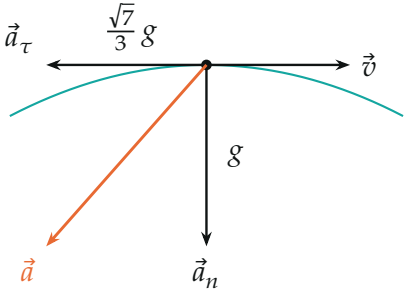
кальным катетом:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_c}{mg} = \frac{\sqrt{7}}{3}, \qquad \cos\alpha = \frac{g}{a} = \frac{3}{4}, \qquad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}}{3} \approx 41{,}4°.$$

Ускорение направлено вниз и назад — в сторону, противоположную скорости.

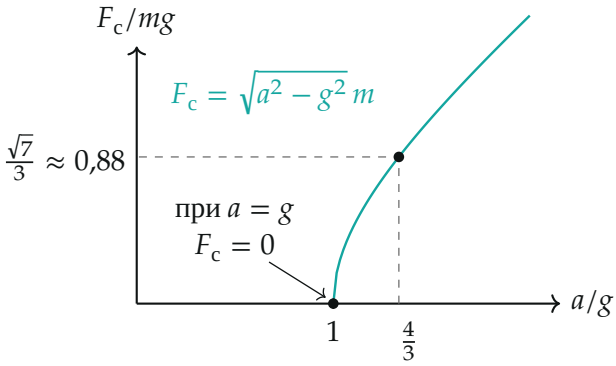
Обратите внимание: ускорение в верхней точке не равно g и не вертикально. Вертикальная составляющая $a_y = -g$ получилась точной только потому, что $v_y = 0$: в других точках траектории скорость наклонена, и сопротивление имеет вертикальную составляющую тоже.

5. Что делают две составляющие ускорения. В верхней точке траектория горизонтальна, поэтому вертикальная составляющая g — нормальная: она только искривляет траекторию (радиус кривизны $R = v^2/g$), а горизонтальная F_c/m — касательная: она уменьшает скорость.



Разложение ускорения в верхней точке: нормальное $\vec{a}_n$ (искривляет траекторию) и касательное $\vec{a}_\tau$ (тормозит). Бирюзовая линия — траектория

Проверка. Размерность: $mg\sqrt{7}/3$ — сила. Предел: при $a \to g$ получаем $F_c \to 0$ и $\alpha \to 0$ — ускорение вертикально и равно g, как в пустоте. Второй способ: стороны треугольника ускорений g, F_c/m и a относятся как $3 : \sqrt{7} : 4$, и действительно $3^2 + (\sqrt{7})^2 = 4^2$.



Сила сопротивления в верхней точке как функция ускорения. При $a < g$ такого тела не бывает: сопротивление не может ускорять вниз

Физический смысл: в верхней точке воздух только тормозит движение вперёд, а разгон вниз остаётся прежним — таким же, как в пустоте.

Ответ. $F_c = \dfrac{\sqrt{7}}{3} mg \approx 0{,}88\, mg$, сила направлена горизонтально назад (против скорости). Ускорение направлено вниз и назад под углом $\alpha = \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{7}}{3} = \arccos \dfrac{3}{4} \approx 41{,}4°$ к вертикали.