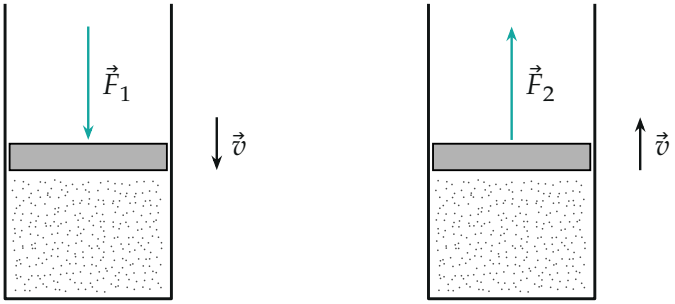
Газ под поршнем с силами F1 и F2

Задача 2. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 10 класс, задача 2] «Газ под поршнем с силами F_1 и F_2».

Вертикальный цилиндрический сосуд перекрыт поршнем площадью S и массой m. В сосуде находится идеальный газ, снаружи — атмосферный воздух. Поршень будет медленно опускаться, если приложить к нему силу F_1, направленную вертикально вниз, и медленно подниматься, если приложить к нему силу F_2, направленную вертикально вверх. Найти давление газа в сосуде, если атмосферное давление p_0.



а) опускание б) подъём

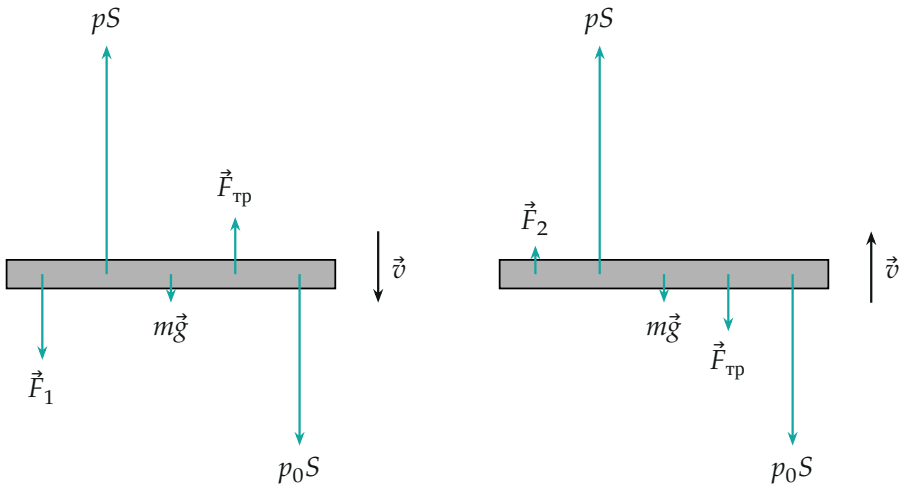
Поясняющий рисунок (в оригинале условия рисунка нет): сосуд открыт сверху, под поршнем газ. Поршень движется медленно: вниз под действием $\vec{F}_1$ и вверх под действием $\vec{F}_2$

▲ **Решение.** **Что происходит.** Поршень движется медленно, то есть без ускорения, поэтому в каждом из двух опытов сумма всех сил на поршень равна нулю. Сил, кроме F_1 и F_2, у нас пять: вес, давление воздуха сверху, давление газа снизу и сила трения о стенки. Из них нам неизвестны давление газа p и сила трения $F_{тр}$, причём одна и та же в обоих опытах, а уравнений два. Значит, трение можно исключить, а давление найти. Главная идея — то, что трение действует *против движения*: при опускании оно направлено вверх, при подъёме вниз, и в сумме двух уравнений оно сокращается.

Зачем нужно трение. Без него поршень можно было бы сдвинуть сколь угодно малой силой, а в условии заданы конкретные силы F_1 и F_2 (в общем случае разные). Значит, между поршнем и стенками действует сила трения.

Обозначения. Ось y направим вертикально вверх. p — давление газа, $F_{\text{тр}}$ — модуль силы трения скольжения (в обоих опытах одинаков: поршень скользит по тем же стенкам). Давление газа в обоих опытах считаем одним и тем же: поршень движется настолько медленно, что давление успевает выровняться по всему объёму, а за малое смещение оно почти не меняется.

1. Силы на поршень. Вниз: сила тяжести mg, давление атмосферы на верхнюю поверхность p_0S и внешняя сила F_1 (в первом опыте). Вверх: давление газа на нижнюю поверхность pS и внешняя сила F_2 (во втором опыте). Сила трения направлена вдоль стенки против скорости поршня.



а) опускание б) подъём

Силы на поршень в двух опытах (стрелки — в масштабе для $F_1 = 3$, $F_2 = 1$, $mg = 1$, $p_0S = 6$, $pS = 8$, $F_{\text{тр}} = 2$ в одних условных единицах). Трение всегда против скорости

2. Опускание поршня. Ускорения нет, поэтому сумма проекций сил

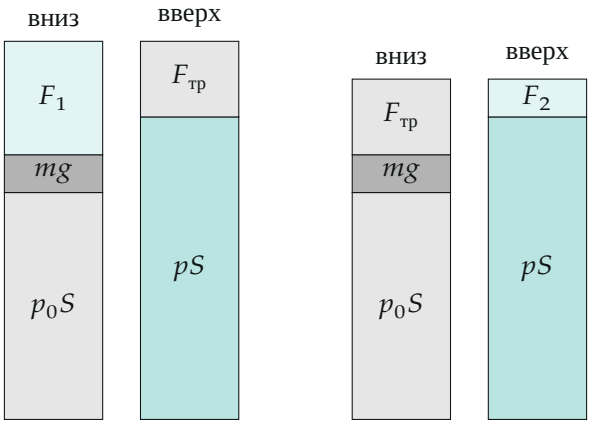
на ось y равна нулю:

$$pS + F_{\text{тр}} - p_0 S - mg - F_1 = 0.$$

Трение здесь направлено вверх, против скорости: оно мешает поршню опускаться.

3. Подъём поршня. Тот же закон, но трение теперь направлено вниз:

$$pS - F_{\text{тр}} - p_0 S - mg + F_2 = 0.$$



а) опускание б) подъём

Равновесие в виде столбиков: сумма сил вниз равна сумме сил вверх (пример: условные единицы, $F_1 = 3$, $F_2 = 1$, $mg = 1$, $p_0S = 6$, $pS = 8$, $F_{\text{тр}} = 2$; высоты в масштабе)

4. Складываем уравнения. Неизвестным остаётся давление p, а $F_{\text{тр}}$ при сложении уходит:

$$2pS - 2p_0 S - 2mg - F_1 + F_2 = 0.$$

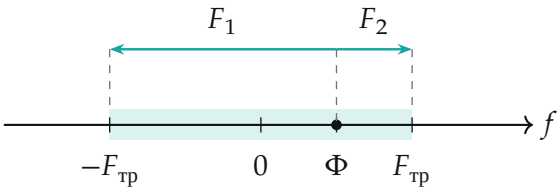
Отсюда

$$p = p_0 + \frac{mg}{S} + \frac{F_1 - F_2}{2S}.$$

Вычитание уравнений даёт заодно силу трения: $F_{\text{тр}} = \dfrac{F_1 + F_2}{2}$.

Обратите внимание: нельзя считать $p = p_0 + mg/S$ — так было бы при покое без трения. Поправка $\dfrac{F_1 - F_2}{2S}$ показывает, насколько трение «несимметрично» относительно условия равновесия: если $F_1 = F_2$, давление газа равно $p_0 + mg/S$.

5. Второй способ: числовая ось сил. Пусть $\Phi = pS - p_0S - mg$ — сумма сил газа, воздуха и тяжести (вверх положительна), без внешних сил и без трения. Поршень остаётся на месте, пока $|\Phi + f| \le F_{\text{тр}}$, где f — внешняя сила; это полоса на оси сил. Внешняя сила сдвигает Φ ровно до границы полосы: $\Phi - F_1 = -F_{\text{тр}}$ при опускании, $\Phi + F_2 = +F_{\text{тр}}$ при подъёме. Границы симметричны относительно нуля, поэтому $\Phi = \dfrac{F_1 - F_2}{2}$ — тот же результат.



Ось сил: бирюзовая полоса — зона, где поршень покоится. Пример: $F_1 = 3$, $F_2 = 1$, $F_{\text{тр}} = 2$, $\Phi = 1$. Сила F_1 сдвигает Φ влево до границы, сила F_2 — вправо до границы

Проверка. Размерность: mg/S и F/S — давление, как и p_0. Предел: при $F_1 = F_2$ получаем $F_{\text{тр}} = F_1$ и $p = p_0 + mg/S$ — газ сам уравновешивает вес поршня и атмосферу, а трение мешает движению одинаково в обе стороны. Знак: чем выше давление газа, тем труднее вдавить поршень и тем легче его поднять, то есть тем больше F_1 и меньше F_2; в ответе p растёт вместе с $F_1 - F_2$. Числа с рисунков: $pS = p_0S + mg + \dfrac{F_1 - F_2}{2} = 6 + 1 + 1 = 8$, и оба уравнения выполняются: $8 + 2 - 6 - 1 - 3 = 0$ и $8 - 2 - 6 - 1 + 1 = 0$.

Физический смысл: две внешние силы, нужные для движения в разные стороны, вместе измеряют и трение (их полусумма), и «несбалансированность» газа (их полуразность).

Ответ. $p = p_0 + \dfrac{mg}{S} + \dfrac{F_1 - F_2}{2S}$.