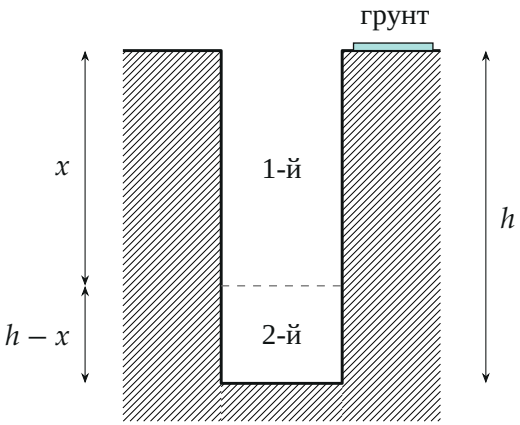
Два рабочих копают колодец

Задача 3. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 10 класс, задача 3] «Два рабочих копают колодец».

Двое рабочих копают цилиндрический колодец глубиной h, выбрасывая грунт на поверхность земли. На какую глубину должен выкопать колодец первый рабочий, чтобы второй рабочий, докопав колодец до конца, совершил такую же работу, как и первый рабочий? Считать, что поднятый грунт располагается тонким слоем на поверхности земли.



Поясняющий рисунок (в оригинале условия рисунка нет): разрез колодца. Первый рабочий выкапывает слой от поверхности до глубины x, второй — от x до дна

▲ **Решение.** **Что происходит.** Рабочий медленно поднимает грунт на поверхность и оставляет его там тонким слоем. Скорость грунта в начале и в конце нулевая, поэтому вся работа рабочего идёт на увеличение потенциальной энергии грунта. Грунт на глубине поднимать тяжелее, чем у поверхности: нужно «заплатить» на всю высоту подъёма. Главная идея: работа по подъёму куска грунта равна mg, умноженному на глубину его *центра тяжести*. Остаётся посчитать эту работу для двух частей колодца и приравнять.

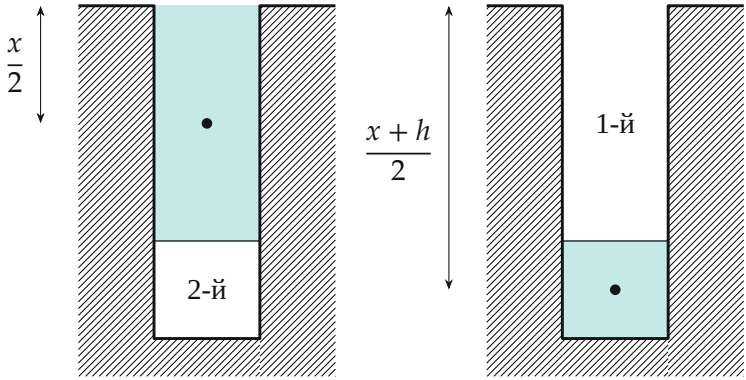
Обозначения. ρ — плотность грунта, S — площадь сечения колодца, x — глубина, до которой копает первый рабочий. Нулевой уровень

потенциальной энергии — поверхность земли: тонкий слой грунта на поверхности имеет энергию, равную нулю.

1. Закон. Грунт поднимают медленно, его кинетическая энергия не меняется. Поэтому работа рабочего равна изменению потенциальной энергии поднятого грунта: $A = \Delta E_\text{п} = 0 - E_\text{п}^\text{нач}$. Потенциальная энергия куска грунта массой M, расположенного на глубине d центра тяжести, равна $-Mgd$; значит, работа по подъёму куска на поверхность

$$A = Mgd.$$

Обратите внимание: d — глубина центра тяжести куска, а не глубина его нижнего края. Для куска, занимающего интервал глубин от a до b, это $d = \dfrac{a+b}{2}$.



Грунт, выкопанный каждым рабочим (бирюзовая заливка), и глубина его центра тяжести (точка). Для первого рабочего это $\frac{x}{2}$, для второго — середина между x и h

2. Работа первого рабочего. Он поднимает грунт массой $M_1 = \rho S x$ с центром тяжести на глубине $x/2$:

$$A_1 = \rho S x \cdot g \cdot \frac{x}{2} = \frac{\rho g S x^2}{2}.$$

3. Работа второго рабочего. Он поднимает грунт между глубинами x и h, массой $M_2 = \rho S(h - x)$. Центр тяжести этого слоя — на середине между x и h, на глубине $\dfrac{x+h}{2}$:

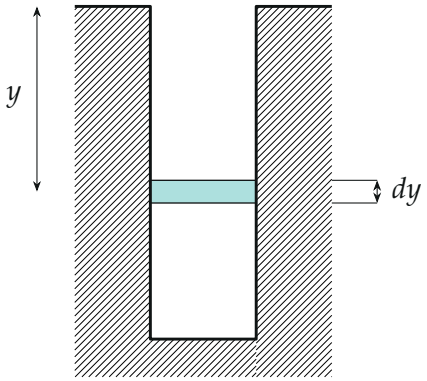
$$A_2 = \rho S(h-x) \cdot g \cdot \frac{x+h}{2} = \frac{\rho g S\,(h^2 - x^2)}{2}.$$

4. Условие задачи. Неизвестным осталась только глубина x. Приравняем работы:

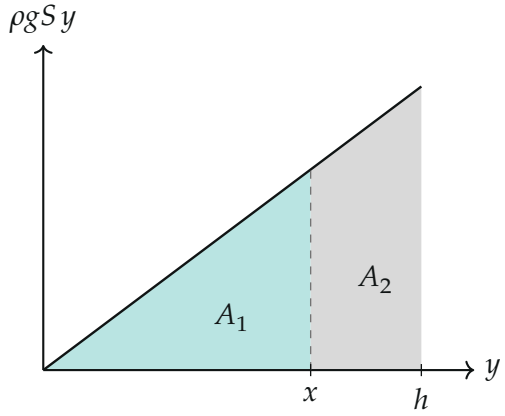
$$\frac{\rho g S x^2}{2} = \frac{\rho g S\,(h^2 - x^2)}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = h^2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{h}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71\,h.$$

Второй рабочий выкапывает оставшиеся $h - \dfrac{h}{\sqrt{2}} \approx 0{,}29\,h$.

5. Второй способ: малый слой и площадь под графиком. Рассмотрим на глубине y тонкий слой толщиной dy. Его масса $dm = \rho S\,dy$, подъём на поверхность требует работы $dA = \rho g S\,y\,dy$. Суммируя слои от одной глубины до другой, получаем работу. Это площадь под прямой $\rho g S\,y$ на соответствующем участке оси глубин.



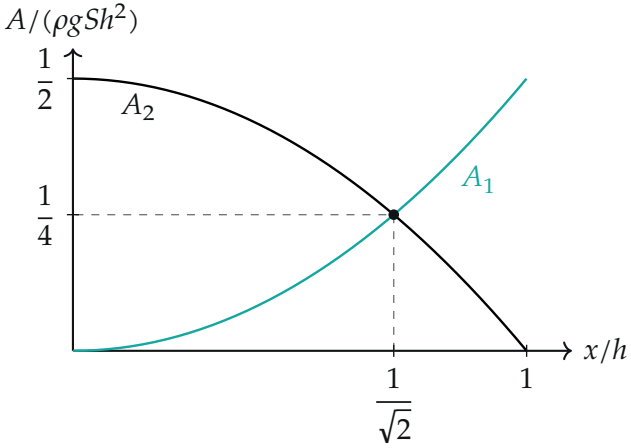
Слой толщиной dy на глубине y: масса $dm = \rho S\,dy$, работа подъёма $dA = dm\,g\,y$



Работа — площадь под графиком $\rho g S\, y$: треугольник A_1 (глубины от 0 до x) и трапеция A_2 (от x до h). При $x = h/\sqrt{2}$ площади равны

Площадь треугольника: $A_1 = \frac{1}{2}\, x \cdot \rho g S x = \dfrac{\rho g S x^2}{2}$. Площадь трапеции — полусумма оснований на высоту: $A_2 = \dfrac{\rho g S x + \rho g S h}{2}\,(h - x)$ и равна $\dfrac{\rho g S (h^2 - x^2)}{2}$ после сокращения — тот же результат. Равенство площадей приводит к $x^2 = h^2 - x^2$.

Проверка. Размерность: $\rho g S x^2$ — $\dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{м}^2 = $ Дж. Сумма работ при $x = h/\sqrt{2}$: $A_1 + A_2 = \dfrac{\rho g S h^2}{2}$ — это полная работа по выемке всего колодца (она не зависит от x), и каждый рабочий делает ровно половину: $A_1 = A_2 = \dfrac{\rho g S h^2}{4}$. Физический смысл: $x > h/2$, потому что верхний грунт поднимать легче, а значит, первому рабочему нужно вынуть больше половины глубины, чтобы работа сравнялась.



Работы двух рабочих как функции x (в единицах $\rho g S h^2$): $A_1 = \frac{1}{2}x^2$ растёт, $A_2 = \frac{1}{2}(1 - x^2)$ убывает. Кривые пересекаются при $x = h/\sqrt{2}$ на уровне $\frac{1}{4}$

Ответ. Первый рабочий должен выкопать колодец до глубины $x = \dfrac{h}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71\,h$ (второй копает оставшиеся $\approx 0{,}29\,h$).