Цепь с перемычкой между узлами

Задача 4. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 10 класс, задача 4] «Цепь с перемычкой между узлами».

Электрическая цепь, схема которой дана на рисунке, состоит из двух одинаковых резисторов R_1, двух одинаковых резисторов R_2, идеального источника напряжения и идеального амперметра. Известно, что если соединить проводом, не имеющим сопротивления, точки A и D, амперметр покажет силу тока $I_1 = 0{,}25$ А. Если соединить проводом, не имеющим сопротивления, точки B и D, амперметр покажет силу тока $I_2 = 0{,}2$ А. Найти отношение сопротивлений резисторов. Какую силу тока покажет амперметр, если соединить проводом, не имеющим сопротивления, точки C и D?

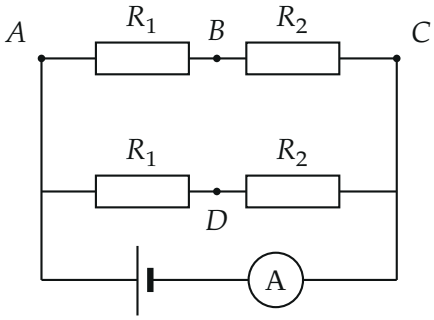


Рисунок условия. Внизу источник напряжения и амперметр (в оригинале буква на амперметре и узлы A, B, C, D подписаны так же)

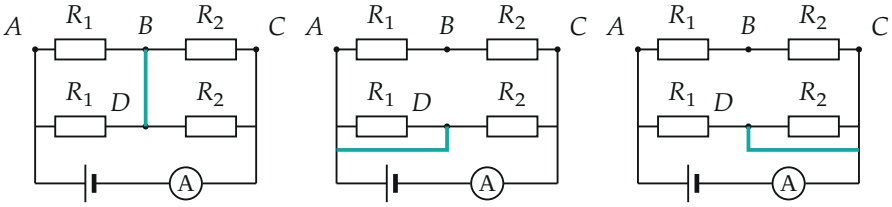
▲ **Решение.** **Что происходит.** Источник идеальный, его напряжение ε приложено между левым проводом (узел A) и правым (узел C). Амперметр идеальный и сопротивления не имеет, поэтому он просто показывает общий ток источника, $I = \varepsilon / R_{\text{общ}}$. Перемычка в каждом из трёх случаев меняет общее сопротивление: значит, достаточно найти $R_{\text{общ}}$ для каждого случая, а токи сравнить делением — неизвестное ε при делении сократится. Класс задачи: эквивалентная схема после замыкания перемычкой.

Обозначения. R_{BD}, R_{AD}, R_{CD} — сопротивление цепи между A и C при перемычке соответственно B–D, A–D, C–D; $I_2 = \varepsilon / R_{BD}$, $I_1 =$

ε/R_{AD}, $I_3 = \varepsilon/R_{CD}$ — токи амперметра. Неизвестны отношение R_1/R_2 и ток I_3.

1. Перемычка B–D**.** Две цепочки $R_1 + R_2$ одинаковы и подключены к одному и тому же напряжению ε между A и C. Потенциалы точек B и D одинаковы: в обеих цепочках от A до B (до D) падает напряжение $\varepsilon R_1/(R_1 + R_2)$. Значит, по перемычке ток не идёт, и цепь работает так, как будто перемычки нет (рисунок ниже, случай а). Две цепочки по $R_1 + R_2$ параллельны:

$$R_{BD} = \frac{R_1 + R_2}{2}, \qquad I_2 = \frac{\varepsilon}{R_{BD}} = \frac{2\varepsilon}{R_1 + R_2}.$$



а) B–D б) A–D в) C–D

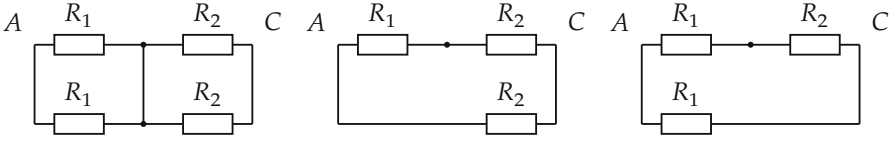
Три случая. Бирюзовый провод — перемычка. Исходная схема, амперметр и источник те же, что в условии

2. Перемычка A–D**.** Точка D получает потенциал левого провода, поэтому нижний левый резистор R_1 оказывается закороченным: напряжение на нём равно нулю, ток в нём не идёт. Между A и C остаются две параллельные ветви: верхняя $R_1 + R_2$ и нижняя R_2 (случай б):

$$R_{AD} = \frac{(R_1 + R_2)R_2}{R_1 + 2R_2}, \qquad I_1 = \frac{\varepsilon}{R_{AD}} = \frac{\varepsilon\,(R_1 + 2R_2)}{(R_1 + R_2)R_2}.$$

3. Перемычка C–D**.** Теперь D имеет потенциал правого провода, и закорачивается нижний правый резистор R_2. Ветви: верхняя $R_1 + R_2$ и нижняя R_1 (случай в):

$$R_{CD} = \frac{(R_1 + R_2)R_1}{2R_1 + R_2}, \qquad I_3 = \frac{\varepsilon}{R_{CD}} = \frac{\varepsilon\,(2R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)R_1}.$$



а) B–D

$$R_{BD} = \frac{R_1 + R_2}{2}$$

б) A–D

$$R_{AD} = \frac{(R_1 + R_2)R_2}{R_1 + 2R_2}$$

в) C–D

$$R_{CD} = \frac{(R_1 + R_2)R_1}{2R_1 + R_2}$$

Эквивалентные схемы между точками A и C: закороченные резисторы убраны, точка D слилась с узлом, к которому подключена перемычка

4. Отношение сопротивлений. Разделим I_1 на I_2 — неизвестное ε сократится:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_1 + 2R_2}{2R_2} = 1 + \frac{R_1}{2R_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{2\,(I_1 - I_2)}{I_2} = \frac{2 \cdot 0{,}05}{0{,}2} = \frac{1}{2}.$$

5. Ток при перемычке C–D. Так же разделим I_3 на I_2:

$$\frac{I_3}{I_2} = \frac{2R_1 + R_2}{2R_1} = 1 + \frac{R_2}{2R_1} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 \quad \Rightarrow \quad I_3 = 2I_2 = 0{,}4\ \text{А}.$$

В общем виде $\dfrac{R_2}{2R_1} = \dfrac{I_2}{4(I_1 - I_2)}$, откуда $I_3 = \dfrac{(4I_1 - 3I_2)\,I_2}{4\,(I_1 - I_2)}$.

Обратите внимание: перемычка B–D вообще ничего не меняет. А при A–D и C–D закорачивается ровно один резистор — тот, что в одной цепочке стоит между D и соединённым узлом; верхняя цепочка остаётся целой.

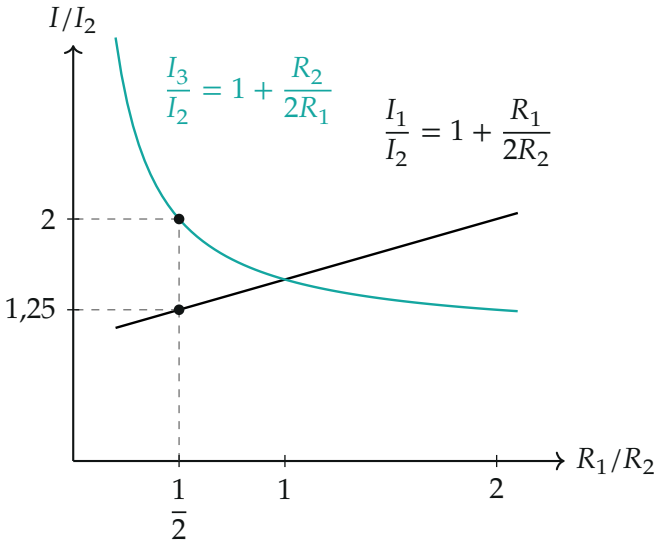
Проверка. Второй способ — по проводимостям: ток амперметра пропорционален общей проводимости цепи $G = 1/R_{\text{общ}}$ (напряжение ε одно и то же). Возьмём $R_2 = 1$, тогда $R_1 = \frac{1}{2}$ (в одних и тех же единицах):

$$G_{BD} = \frac{2}{R_1 + R_2} = \frac{4}{3},$$

$$G_{AD} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_2} = \frac{5}{3},$$

$$G_{CD} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1 + R_2} = \frac{8}{3}.$$

Отношения $G_{AD}/G_{BD} = \frac{5}{4} = \frac{0{,}25}{0{,}2}$ и $G_{CD}/G_{BD} = 2 = \frac{I_3}{0{,}2}$ — те же числа, что получились выше. Размерность: токи делятся друг на друга, ответ в амперах.



Токи относительно I_2 как функции R_1/R_2 (бирюзовая — I_3, чёрная — I_1). Точки при $R_1/R_2 = \frac{1}{2}$: $I_1/I_2 = 1{,}25$ и $I_3/I_2 = 2$. При $R_1 = R_2$ токи I_1 и I_3 равны

Физический смысл: чем меньше R_1 по сравнению с R_2, тем сильнее «работает» перемычка C–D, которая оставляет в нижней ветви именно маленький R_1, — ток растёт.

Ответ. $\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}$; при соединении точек C и D амперметр покажет $I_3 = \frac{(4I_1 - 3I_2)I_2}{4(I_1 - I_2)} = 0{,}4$ А.