Бусинки на изогнутой проволоке

Задача 5. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 10 класс, задача 5] «Бусинки на изогнутой проволоке».

Гладкую проволоку согнули под углом $\alpha = 120°$ и надели на неё две бусинки массой m и $2m$, которые могут скользить по проволоке без трения. Бусинки связали нерастяжимой нитью длиной l и расположили так, что угол между нитью и проволокой равен $\beta = 30°$ (см. рисунок). В этот момент на одну из бусинок начала действовать постоянная сила $\vec{F}$, направленная вдоль проволоки (см. рисунок). Найти силу натяжения нити в этот момент. Какую скорость будут иметь бусинки перед тем, как вторая бусинка дойдёт до угла на проволоке. Силой тяжести пренебречь.

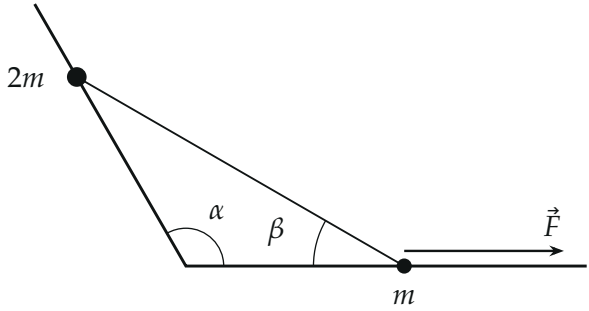


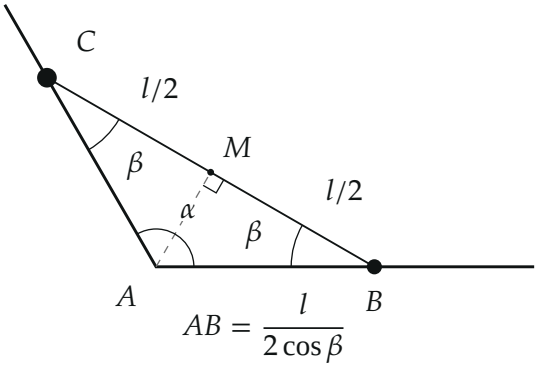
Рисунок условия. Углы показаны по числам условия: $\alpha = 120°$, $\beta = 30°$; сила $\vec{F}$ действует на бусинку массой m вдоль проволоки от угла

▲ **Решение. Что происходит.** Сила $\vec{F}$ тянет бусинку m вдоль её участка проволоки от угла. Нить нерастяжима, поэтому она тянет за ней бусинку $2m$, и та скользит по своему участку к углу. У системы одна степень свободы: стоит задать положение одной бусинки, и положение другой определено длиной нити. Главная идея — два шага. Сразу после начала движения (скорости ещё нулевые) ускорения бусинок связаны условием нерастяжимости нити, и из второго закона Ньютона находится натяжение. Дальше вся работа силы $\vec{F}$ идёт на кинетическую энергию, а скорости в конечный момент связаны проекциями на нить. Бусинка, которая дойдёт до угла, — это бусинка $2m$: бусинка m уходит от угла.

Обозначения. A — угол проволоки, B — бусинка массой m (на ней сила $\vec{F}$), C — бусинка массой $2m$. T — натяжение нити (нить невесомая, на обоих концах оно одно и то же). a_2 — ускорение бусинки B вдоль проволоки (от угла), a_1 — ускорение бусинки C вдоль проволоки (к углу). v_2 и v_1 — скорости B и C в конце.

1. Геометрия. Сумма углов треугольника ABC равна 180°, угол при вершине A равен 120°, угол при B равен $\beta = 30°$, значит, и угол при C равен 30°. Треугольник равнобедренный, $AB = AC$. Высота из A делит нить пополам, и из прямоугольного треугольника с углом β

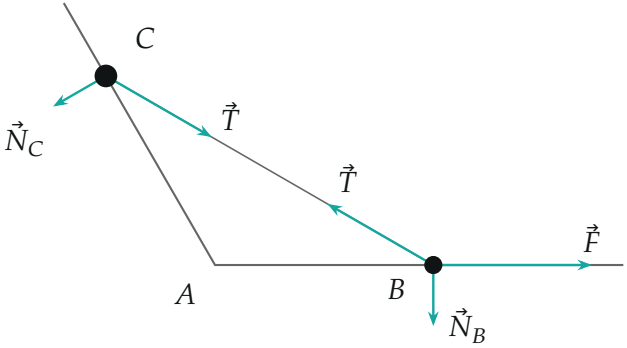
$$\frac{l}{2} = AB\cos\beta \quad \Rightarrow \quad AB = AC = \frac{l}{2\cos\beta} = \frac{l}{\sqrt{3}}.$$



Треугольник из проволоки и нити: два угла по 30°, высота AM делит нить BC на две равные части по $\frac{l}{2}$

2. Второй закон Ньютона для каждой бусинки вдоль проволоки. Сила реакции гладкой проволоки перпендикулярна проволоке и в проекцию на неё не входит, поэтому вдоль проволоки остаются только натяжение нити (его проекция — $T\cos\beta$, потому что нить составляет угол β с проволокой) и сила $\vec{F}$. Для бусинки C (ось к углу A) и для бусинки B (ось от угла A):

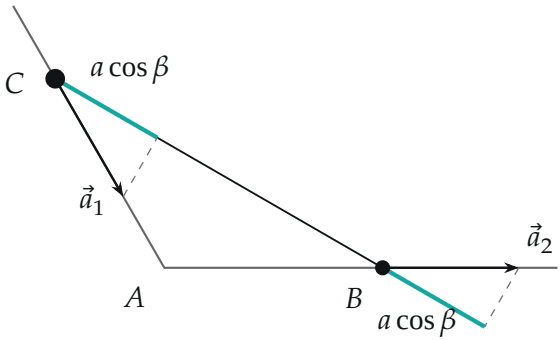
$$2m\,a_1 = T\cos\beta, \qquad m\,a_2 = F - T\cos\beta.$$



Силы на бусинки в начальный момент (длины стрелок в масштабе: $T = \frac{4}{3\sqrt{3}}F$, $N = \frac{1}{2}T$). $\vec{N}_B$ и $\vec{N}_C$ — реакции проволоки, перпендикулярные проволоке

3. Связь ускорений. Нить нерастяжима и натянута: проекции скоростей её концов на нить всегда равны, иначе длина нити менялась бы. В начальный момент скорости равны нулю, направление нити за малое время почти не меняется, и условие равенства проекций переходит в такое же условие для ускорений. Нить составляет с каждым участком проволоки один и тот же угол β, поэтому

$$a_2 \cos\beta = a_1 \cos\beta \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = a.$$



Проекции ускорений на нить (бирюзовые отрезки) одинаковы. Ускорения $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_1$ направлены вдоль своих участков проволоки и равны по модулю

4. Натяжение. Неизвестными осталось a и T. Сложим уравнения пункта 2: слагаемые с T сократятся, и

$$3m\,a = F \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F}{3m},$$

$$T\cos\beta = 2ma = \frac{2F}{3} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2F}{3\cos\beta} = \frac{4F}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}77\,F.$$

Обратите внимание: $a_1 = a_2$ верно только в начальный момент, пока оба угла равны β. Позже углы меняются (угол при C растёт, при B убывает), и связь ускорений становится другой. Поэтому для скоростей в конце нельзя взять $v_1 = v_2$.

5. Что происходит с энергией. Работу совершает только сила $\vec{F}$: реакции проволоки перпендикулярны скоростям, а работа силы натяжения по двум концам нити равна нулю (нить нерастяжима, перемещения концов вдоль нити равны, силы натяжения равны и противоположны). Теорема об изменении кинетической энергии системы от начала до момента, когда бусинка C достигла угла A:

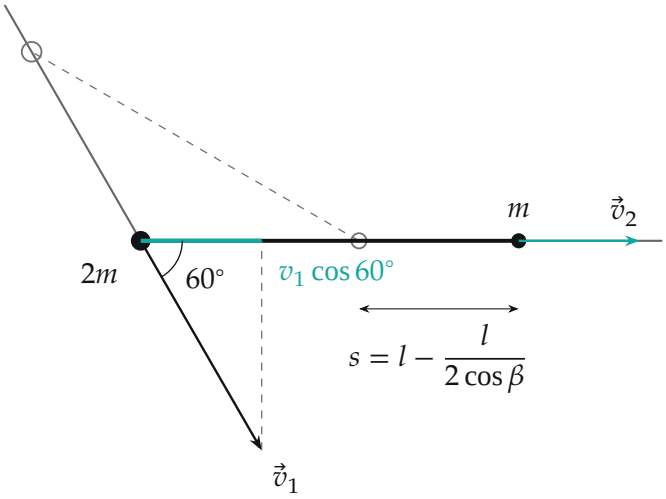
$$\frac{2m\,v_1^2}{2} + \frac{m\,v_2^2}{2} = A_F.$$

6. Работа силы $\vec{F}$. Когда C приходит в угол A, длина AC равна нулю, нить лежит вдоль проволоки, и B находится на расстоянии l от угла. Сила $\vec{F}$ направлена вдоль перемещения B, поэтому

$$s = l - \frac{l}{2\cos\beta} = l\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\Big), \qquad A_F = Fs = \frac{(\sqrt{3}-1)\,Fl}{\sqrt{3}}.$$

7. Связь скоростей в конце. В этот момент нить лежит вдоль проволоки AB, а скорость бусинки C направлена вдоль другого участка проволоки к углу, под углом 60° к нити ($180° - \alpha = 60°$). Проекции скоростей концов нити на нить равны:

$$v_1\cos 60° = v_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2v_2.$$



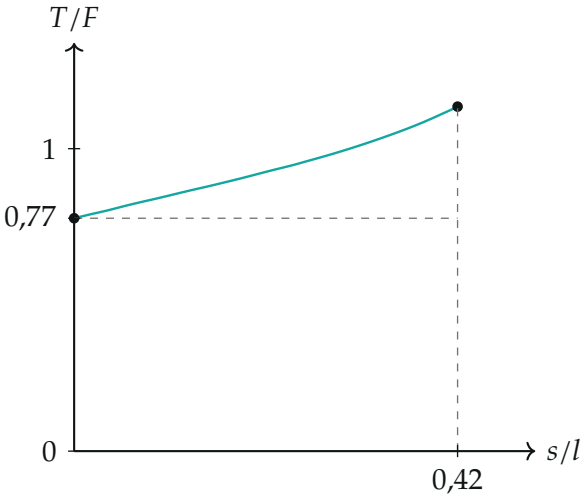
Конец процесса: С у угла, нить вдоль проволоки. Серые кружки — начальные положения бусинок, пунктир — начальное положение нити. Проекция $\vec{v}_1$ на нить равна $\vec{v}_2$

8. Скорости. Подставим $v_1 = 2v_2$ в теорему об энергии и воспользуемся пунктом 6:

$$m(2v_2)^2 + \frac{m\,v_2^2}{2} = \frac{9}{2}\,m\,v_2^2 = \frac{(\sqrt{3}-1)\,Fl}{\sqrt{3}},$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(\sqrt{3}-1)\,Fl}{9\sqrt{3}\,m}} \approx 0{,}31\sqrt{\frac{Fl}{m}}, \qquad v_1 = 2v_2 \approx 0{,}61\sqrt{\frac{Fl}{m}}.$$

Проверка. Размерность: Fl/m — м^2/с^2, корень — скорость. Энергия распределена так: у бусинки $2m$ доля $\frac{4}{4{,}5} = \frac{8}{9}$ — она и движется быстрее, и тяжелее. Второй способ — численное решение уравнения движения (python, $F = l = m = 1$): бусинка m проходит $s \approx 0{,}423$, скорости получаются $v_2 \approx 0{,}3065$ и $v_1 \approx 0{,}613$ — те же числа. Заодно проверено условие, на котором держится весь ход: нить остаётся натянутой. Её натяжение растёт от $0{,}77F$ до $1{,}14F$ и не обращается в нуль.



Натяжение нити (численный расчёт). Начало — $T = \frac{4}{3\sqrt{3}}F \approx 0{,}77F$, конец — момент прихода C в угол при смещении $s = (1 - \frac{1}{\sqrt{3}})l \approx 0{,}42\,l$ бусинки B

Физический смысл: нить заставляет бусинки двигаться согласованно, но не одинаково. В конце проекции скоростей на нить равны, а сами скорости — нет, потому что участки проволоки идут под разными углами к нити. Бусинка $2m$, пришедшая в угол, движется вдвое быстрее бусинки m и несёт $\frac{8}{9}$ всей кинетической энергии.

Ответ. Натяжение нити в начальный момент $T = \dfrac{4F}{3\sqrt{3}}$. Скорости перед приходом бусинки $2m$ в угол:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(\sqrt{3}-1)\,Fl}{9\sqrt{3}\,m}}\ \text{(бусинка } m\text{)}, \qquad v_1 = 2v_2\ \text{(бусинка } 2m\text{)}.$$