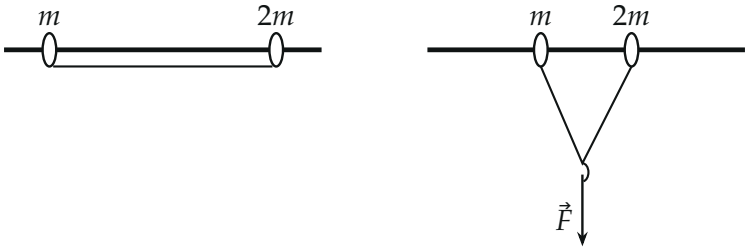
Бусинки на спице и крюк

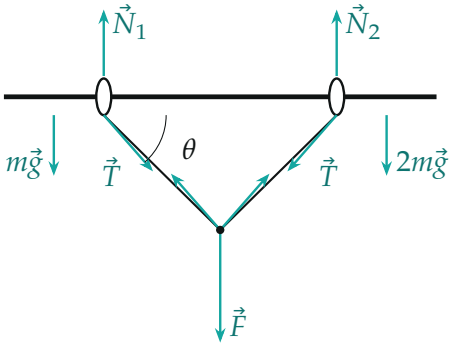
Задача 2. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 11 класс, задача 2] «Бусинки на спице и крюк».

На гладкую горизонтальную спицу надели две массивные бусинки массами m и $2m$, связанные лёгкой нерастяжимой нитью длиной $2L$. Вначале нить натянута и является горизонтальной (см. левый рисунок). Затем нить зацепили лёгким крюком и стали тянуть его с силой F, направленной вертикально вниз (см. правый рисунок). Какую скорость будут иметь бусинки в момент их столкновения?



▲ **Решение. Что происходит.** Сила F вертикальна, спица горизонтальна и гладкая: по горизонтали на систему «бусинки + нить + крюк» внешних сил нет. Значит, центр масс бусинок не двигается по горизонтали, бусинки сближаются и встречаются в центре масс. Их скорости связаны сохранением импульса. А работа силы F идёт только на кинетическую энергию бусинок: потенциальная не меняется, так как бусинки движутся по горизонтали. Нужны два закона — сохранение горизонтальной проекции импульса и работа (энергия) — и расстояние, которое пройдёт крюк по вертикали до встречи.

Обозначения. v_1 и v_2 — скорости бусинок m и $2m$ в момент встречи (по модулю); ось x — вдоль спицы вправо; θ — угол между нитью и спицей в произвольный момент; h — глубина крюка под спицей. Крюк и нить лёгкие, трения нет.



Силы в произвольный момент: на бусинки действуют натяжения $\vec{T}$ (нить), реакции спицы $\vec{N}$ и силы тяжести; на крюк — $\vec{F}$ и два натяжения

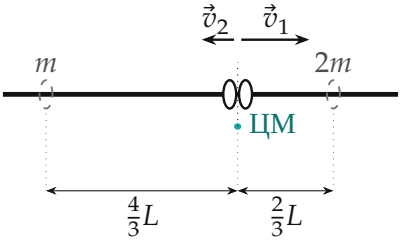
1. Сохранение горизонтальной проекции импульса. Внешние силы для системы бусинки + нить + крюк — силы тяжести, реакции спицы и F: все вертикальны, и проекция суммарного импульса на ось x сохраняется. В начале всё покоилось, поэтому

$$m\,v_{1x} + 2m\,v_{2x} = 0.$$

Бусинки движутся навстречу друг другу, так что по модулю

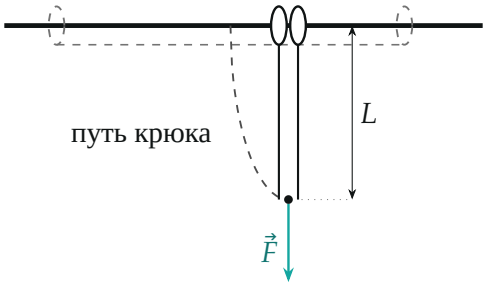
$$mv_1 = 2mv_2 \quad \Longrightarrow \quad v_2 = \frac{v_1}{2}.$$

Центр масс неподвижен по горизонтали, и сближение идёт до встречи в нём: бусинка m проходит $\frac{4}{3}L$, бусинка $2m$ — $\frac{2}{3}L$.



Бусинки встречаются в центре масс: расстояния $\frac{4}{3}L$ и $\frac{2}{3}L$, скорости в момент встречи $v_1 = 2v_2$

2. Где крюк в момент встречи. Нить длиной $2L$ зацеплена крюком посередине, каждая половина длиной L. В момент встречи бусинки в одной точке, обе половины нити вертикальны, и крюк находится на глубине L под спицей. Горизонтально крюк при этом смещается (его место — середина между бусинками), но сила F вертикальна, поэтому работу совершает только вертикальное смещение, равное L.



Траектория крюка (расчёт по расстоянию между бусинками): по вертикали он опускается на L; бусинки — в момент встречи

3. Работа силы F. Сила постоянна, вертикальное смещение точки её приложения L, направление вдоль силы:

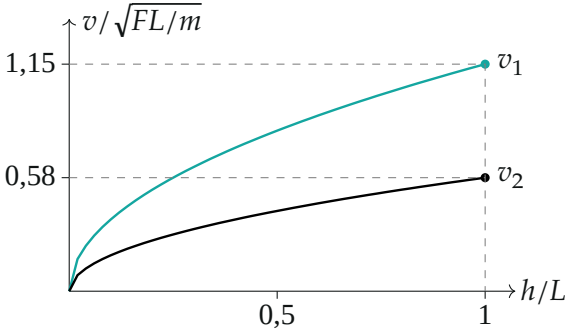
$$A_F = F\,L.$$

4. Закон сохранения энергии. Для системы бусинки + нить + крюк (нить нерастяжима и лёгкая, крюк лёгкий, трения нет, потенциальная энергия бусинок не меняется) работа внешней силы F равна приросту кинетической энергии бусинок:

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{2mv_2^2}{2} = FL.$$

Подставим $v_2 = v_1/2$:

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_1^2}{4} = \frac{3}{4}\,mv_1^2 = FL \quad\Longrightarrow\quad v_1 = 2\sqrt{\frac{FL}{3m}}, \qquad v_2 = \frac{v_1}{2} = \sqrt{\frac{FL}{3m}}.$$



Скорости бусинок по мере опускания крюка на глубину h: $v_1 = 2\sqrt{Fh/(3m)}$, $v_2 = v_1/2$ (по тому же закону сохранения энергии)

Обратите внимание. Работу силы считаем по вертикальному смещению крюка, а не по пути самого крюка: сила вертикальна, и горизонтальная часть смещения работы не даёт. Нить натянута всё время, поэтому ничто не теряется на удар до столкновения бусинок.

Проверка. Второй способ — прямое численное решение уравнений движения (второй закон Ньютона для бусинок: $m\ddot{x}_1 = T\cos\theta$, $2m\ddot{x}_2 = -T\cos\theta$, равновесие лёгкого крюка по вертикали $2T\sin\theta = F$): при $F = L = m = 1$ получаются $v_1 = 1{,}1547 = 2/\sqrt{3}$ и $v_2 = 0{,}5774 = 1/\sqrt{3}$, бусинки сходятся на расстоянии $\frac{4}{3}L$ от начального положения бусинки m — всё совпадает с ответом. Размерность: FL/m — работа на массу, то есть квадрат скорости. Предел: при $m \to \infty$ скорости стремятся к нулю.

Смысл: энергия силы F делится между бусинками обратно пропорционально массам: лёгкая бусинка получает две трети энергии ($\frac{mv_1^2}{2} = \frac{2}{3}FL$), тяжёлая — одну треть.

Ответ. Бусинка массой m: $v_1 = 2\sqrt{\dfrac{FL}{3m}}$; бусинка массой $2m$: $v_2 = \sqrt{\dfrac{FL}{3m}}$.