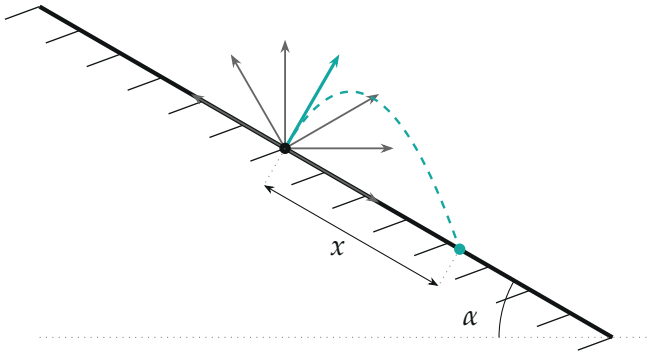
Взрыв гранаты на склоне

Задача 3. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 11 класс, задача 3] «Взрыв гранаты на склоне».

На склоне горы, составляющем угол α с горизонтом, на множество мелких осколков взорвалась граната. Осколки полетели во все стороны с одинаковой по величине начальной скоростью v_0. На каком расстоянии от места взрыва упадёт последний упавший на склон осколок?



Поясняющий рисунок: от места взрыва (точка) разлетаются осколки; штриховой траекторией показан тот, что упадёт последним

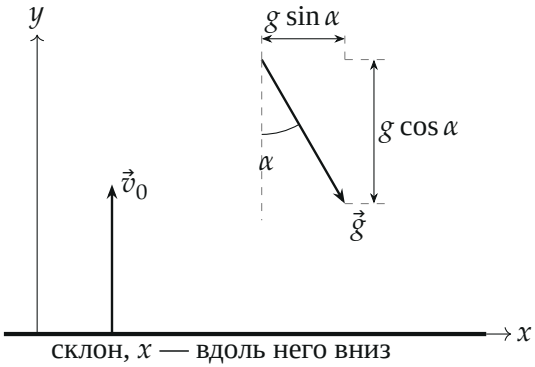
▲ **Решение. Что происходит.** Это баллистика на наклонной плоскости: все осколки летят с одним и тем же ускорением $\vec{g}$ (сопротивления воздуха нет). Осколок падает на склон, когда возвращается на него, то есть когда его расстояние до плоскости склона снова равно нулю. Это расстояние меняется по закону, в который входит только проекция скорости на нормаль к склону. Поэтому последним упадёт осколок с наибольшей такой проекцией. Идея — разложить движение на два: поперёк склона (определяет время полёта) и вдоль склона (определяет, куда за это время сместится осколок).

Обозначения. Ось x — вдоль склона вниз, ось y — перпендикулярно склону от него; начало — место взрыва; φ — угол между вектором начальной скорости осколка и осью x (вектор в вертикальной плоскости, проходящей через линию наибольшего ската); t — время полёта. Осколки считаем материальными точками.

1. Ускорение в осях склона. Вектор $\vec{g}$ направлен вертикально вниз и образует с нормалью к склону (направлением $-y$) угол α, а с осью x — угол $90^\circ - \alpha$:

$$a_x = g\sin\alpha, \qquad a_y = -g\cos\alpha.$$

Обе проекции постоянны, и движение вдоль каждой оси — равноускоренное. Ось выбрана так, чтобы начальная скорость осколка, перпендикулярного склону, лежала целиком на оси y.



Оси вдоль склона и по нормали; $\vec{g}$ раскладывается на $g\sin\alpha$ вдоль склона и $g\cos\alpha$ по нормали

2. Время полёта. Начальная скорость осколка имеет проекции $v_{0x} = v_0\cos\varphi$ и $v_{0y} = v_0\sin\varphi$. По оси y:

$$y(t) = v_0\sin\varphi\cdot t - \frac{g\cos\alpha}{2}t^2.$$

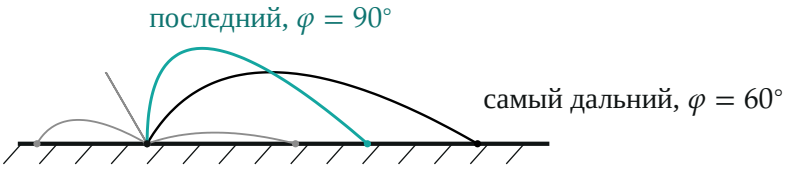
Осколок падает на склон, когда $y = 0$ (при $t > 0$):

$$t(\varphi) = \frac{2v_0\sin\varphi}{g\cos\alpha}.$$

3. Какой осколок последний. Время $t(\varphi)$ растёт вместе с $\sin\varphi$ и наибольшее при $\sin\varphi = 1$, то есть при $\varphi = 90^\circ$: вектор начальной скорости

перпендикулярен склону. Для него

$$t_{\max} = \frac{2v_0}{g\cos\alpha}, \qquad v_{0x} = 0, \quad v_{0y} = v_0.$$

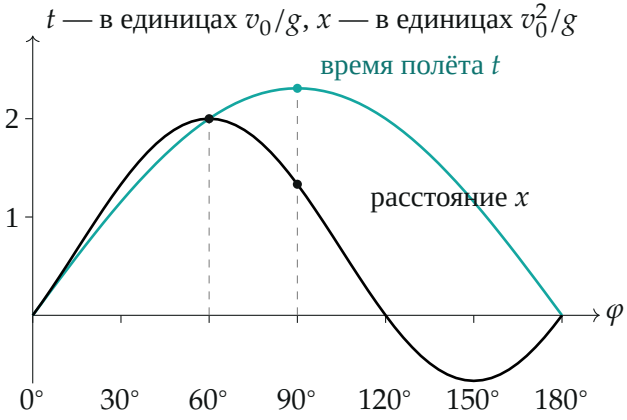


Траектории осколков в осях склона (расчёт): все возвращаются на склон; дольше всех летит осколок, брошенный перпендикулярно склону

4. Смещение вдоль склона. По оси x у этого осколка нет начальной скорости, а ускорение $g\sin\alpha$ постоянно:

$$x = \frac{g\sin\alpha}{2}\,t_{\max}^2 = \frac{g\sin\alpha}{2}\cdot\frac{4v_0^2}{g^2\cos^2\alpha} = \frac{2v_0^2\sin\alpha}{g\cos^2\alpha}.$$

Так как осколок движется вдоль склона только в сторону ускорения, смещение x и есть расстояние от места взрыва до точки падения (вниз по склону).



Для $\alpha = 30°$: время полёта (бирюзовая кривая) максимально при $\varphi = 90°$, расстояние до места падения — при $\varphi = 60°$ ($x < 0$ — падение выше места взрыва)

Обратите внимание. Последний осколок — не самый дальний. Дальше всех падает осколок с $\varphi = 45° + \alpha/2$ (при $\alpha = 30°$ это 60°), на расстоянии $v_0^2/(g(1 - \sin\alpha))$, но он летит меньше. У последнего осколка расстояние $2v_0^2 \sin\alpha/(g\cos^2\alpha)$; при $\alpha = 30°$ оно составляет $\frac{4}{3}\,v_0^2/g$ против $2v_0^2/g$ у самого дальнего.

Проверка. Второй способ — численный перебор: для $\alpha = 30°$, $v_0 = 10$ м/с, $g = 9{,}81$ м/с^2 перебор угла φ даёт наибольшее время полёта 2,354 с при $\varphi = 90°$ и смещение 13,6 м, формула даёт 13,59 м. Предел $\alpha \to 0$ (горизонтальная земля): $x \to 0$ — осколок, брошенный вертикально вверх, возвращается в точку взрыва, и он действительно упадёт последним. Размерность: v_0^2/g — длина.

Смысл: время полёта определяется только «высотой подъёма» над склоном, а потом осколок просто сносит вниз по склону с ускорением $g\sin\alpha$.

Ответ. $x = \dfrac{2v_0^2 \sin\alpha}{g\cos^2\alpha}$ вниз по склону от места взрыва.