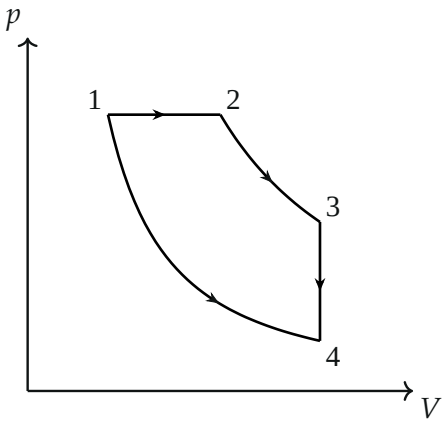
КПД цикла из изобары, адиабат и изохоры

Задача 4. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 11 класс, задача 4] «КПД цикла из изобары, адиабат и изохоры».

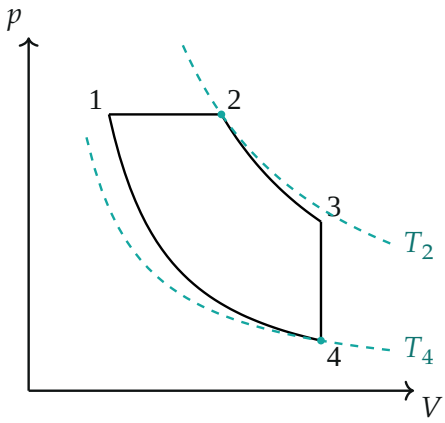
С одноатомным идеальным газом проводят циклический процесс, состоящий из изобарического (1–2), адиабатического (2–3), изохорического (3–4) и адиабатического (4–1) процессов (см. рисунок). Известно, что: (1) КПД цикла Карно, проводимого между изотермами, отвечающими максимальной и минимальной температурами в этом цикле, равен $\eta_1 = 0{,}75$; (2) КПД цикла Карно с адиабатным расширением 2–3 равен $\eta_2 = 0{,}25$; (3) КПД цикла Карно с адиабатным сжатием 4–1 равен $\eta_3 = 0{,}5$. Найти КПД цикла 1–2–3–4–1.



▲ **Решение. Что происходит.** КПД любого цикла — это $\eta = 1 - Q_\text{х}/Q_\text{н}$: какую долю полученной теплоты $Q_\text{н}$ газ не отдаёт холодильнику. Для цикла Карно, у которого два изотермических процесса и два адиабатических, КПД зависит только от температур: $\eta = 1 - T_\text{х}/T_\text{н}$. Три КПД Карно из условия — это три отношения температур состояний 1–4. Выразим температуры через одну, найдём теплоты на двух участках нашего цикла, где идёт теплообмен, и посчитаем КПД. Идея — «температуры из Карно, теплоты из первого начала».

Обозначения. T_1, T_2, T_3, T_4 — температуры газа в состояниях 1–4; ν — число молей; для одноатомного газа $C_V = \frac{3}{2}R$, $C_p = \frac{5}{2}R$; $Q_\text{н}$ — теплота, полученная газом за цикл, $Q_\text{х}$ — отданная.

1. Какая температура наибольшая и какая наименьшая. Проследим температуру по циклу, $T \propto pV$. Изобара 1–2: объём растёт при постоянном давлении, температура растёт: $T_2 > T_1$. Адиабата 2–3 — расширение без притока теплоты, газ совершает работу за счёт внутренней энергии и охлаждается: $T_3 < T_2$. Изохора 3–4: давление падает при постоянном объёме, температура падает: $T_4 < T_3$. Адиабата 4–1 — сжатие, температура растёт: $T_1 > T_4$. Итак, T_2 наибольшая, T_4 наименьшая; весь цикл лежит между изотермами этих двух температур.



Цикл между изотермами T_4 (наименьшая) и T_2 (наибольшая)

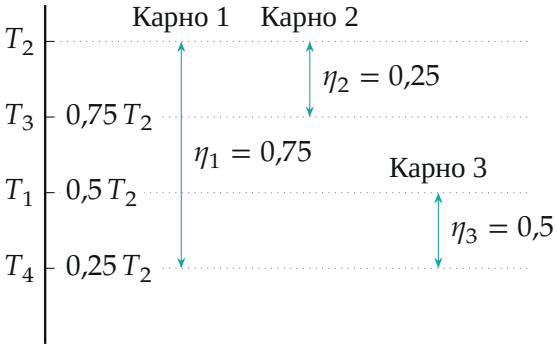
2. Три цикла Карно. Запишем КПД $\eta = 1 - T_\text{х}/T_\text{н}$ для каждого цикла: у первого нагреватель T_2, холодильник T_4; у второго цикла, где адиабата — расширение 2–3, изотермы проходят через состояния 2 и 3 (нагреватель T_2, холодильник T_3); у третьего адиабата — сжатие 4–1, изотермы через состояния 4 и 1 (нагреватель T_1, холодильник T_4):

$$\eta_1 = 1 - \frac{T_4}{T_2}, \qquad \eta_2 = 1 - \frac{T_3}{T_2}, \qquad \eta_3 = 1 - \frac{T_4}{T_1}.$$

Минимум букв: выразим всё через T_2:

$$T_4 = (1 - \eta_1)T_2, \qquad T_3 = (1 - \eta_2)T_2, \qquad T_1 = \frac{T_4}{1 - \eta_3} = \frac{1 - \eta_1}{1 - \eta_3}\,T_2.$$

Числа: $T_4 = 0{,}25\,T_2$, $T_3 = 0{,}75\,T_2$, $T_1 = 0{,}5\,T_2$.



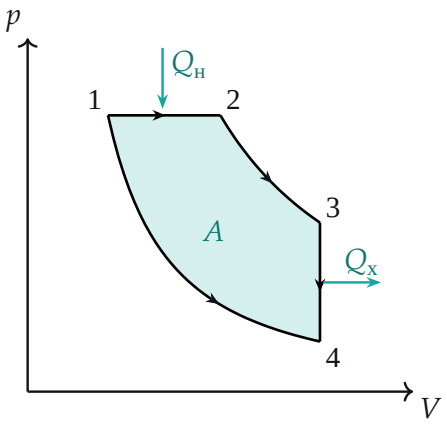
Температуры состояний в долях T_2 и три цикла Карно

3. Теплота на каждом участке. На адиабатах 2–3 и 4–1 теплообмена нет. На изобаре 1–2 температура растёт, газ *получает* теплоту; для одноатомного газа при $p = \text{const}$ $Q = \nu C_p \Delta T$:

$$Q_\text{н} = \frac{5}{2}\,\nu R\,(T_2 - T_1).$$

На изохоре 3–4 температура падает, газ *отдаёт* теплоту, $Q = \nu C_V \Delta T$ (работа равна нулю, и вся теплота идёт на изменение внутренней энергии):

$$Q_\text{х} = \frac{3}{2}\,\nu R\,(T_3 - T_4).$$



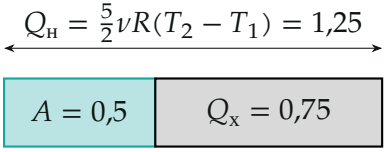
Тепло $Q_н$ газ получает на изобаре 1–2, отдаёт $Q_х$ на изохоре 3–4; закрашена работа A за цикл

4. КПД цикла.

$$\eta = 1 - \frac{Q_х}{Q_н} = 1 - \frac{3\,(T_3 - T_4)}{5\,(T_2 - T_1)}.$$

Подставим температуры из пункта 2: $T_3 - T_4 = (\eta_1 - \eta_2)T_2$, $T_2 - T_1 = \dfrac{\eta_1 - \eta_3}{1 - \eta_3}\,T_2$, откуда

$$\eta = 1 - \frac{3\,(\eta_1 - \eta_2)(1 - \eta_3)}{5\,(\eta_1 - \eta_3)} = 1 - \frac{3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}{5 \cdot 0{,}25} = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.$$



в единицах $\nu R T_2$; $\eta = \dfrac{A}{Q_н} = \dfrac{0{,}5}{1{,}25} = 0{,}4$

Теплота, полученная газом, делится на работу и отданную теплоту

Обратите внимание. Для изохоры берём $C_V = \frac{3}{2}R$, а для изобары $C_p = \frac{5}{2}R$: перепутать их — самая частая ошибка. Нагреватель и холодильник цикла — не T_{max} и T_{min}: газ получает теплоту только на участке 1–2 и отдаёт только на 3–4, поэтому в $Q_н$ и $Q_х$ входят температуры T_1, T_2 и T_3, T_4.

Проверка. Второй способ — через работу по участкам (в единицах $\nu R T_2$). Изобара 1–2: $A_{12} = \nu R(T_2 - T_1) = 0{,}5$; изохора 3–4: $A = 0$; адиабата 2–3: $A_{23} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_3) = 0{,}375$; адиабата 4–1: $A_{41} = -\frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_4) = -0{,}375$. Сумма $A = 0{,}5$, а $Q_н - Q_х = 1{,}25 - 0{,}75 = 0{,}5$ — первое начало для цикла выполнено, $\eta = A/Q_н = 0{,}5/1{,}25 = 0{,}4$. Предел: КПД не может превосходить КПД Карно между T_{max} и T_{min}, то есть $\eta_1 = 0{,}75$; $0{,}4 < 0{,}75$ — верно.

Замечание. Три КПД Карно из условия избыточны: форма цикла (изобара 1–2 и общий объём состояний 3 и 4) связывает температуры для одноатомного газа соотношением $T_1 T_3^{3/5} = T_2 T_4^{3/5}$. Заданные числа удовлетворяют ему приближённо ($0{,}421\,T_2$ против $0{,}435\,T_2$), поэтому ответ получают так, как задумано, подставляя все три КПД.

Смысл: КПД цикла в 0,4 говорит, что 40 % полученной теплоты превращается в работу; это заметно меньше предела Карно, 75 %.

Ответ. $\eta = 1 - \dfrac{3(\eta_1 - \eta_2)(1 - \eta_3)}{5(\eta_1 - \eta_3)} = 0{,}4\ (40\,\%)$.