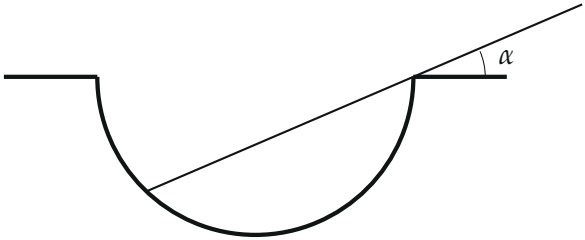
Стержень в полусферической лунке

Задача 5. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 11 класс, задача 5] «Стержень в полусферической лунке».

В полусферическую гладкую лунку радиуса R положили стержень длиной $2L$ (см. рисунок). Каким будет угол между стержнем и горизонтальной плоскостью в равновесии стержня (угол α на рисунке)? Трение между всеми поверхностями отсутствует. Плоскость, «замыкающая» полусферическую лунку, горизонтальна.

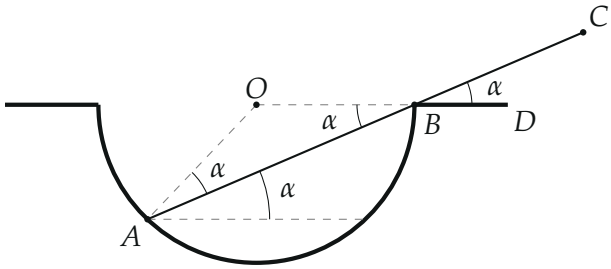


▲ **Решение. Что происходит.** Стержень лежит нижним концом на гладкой поверхности лунки и опирается на её край (ребро) в точке между концами. Положение стержня однозначно задаётся одним углом α. Связи гладкие, их силы реакции перпендикулярны перемещению и работы не совершают, поэтому равновесию соответствует минимум потенциальной энергии как функции α. Главная идея — записать потенциальную энергию через α и найти минимум. Второй способ — через силы и моменты — дадим в проверке.

Обозначения. O — центр лунки, он лежит в плоскости её края; A — нижний конец стержня, он касается поверхности лунки; B — точка опоры стержня на край лунки; C — верхний конец стержня; D — точка на горизонтальной плоскости справа от B; G — центр тяжести стержня, середина; m — его масса. Высоты считаем от нижней точки лунки; $OA = OB = R$, $AG = L$.

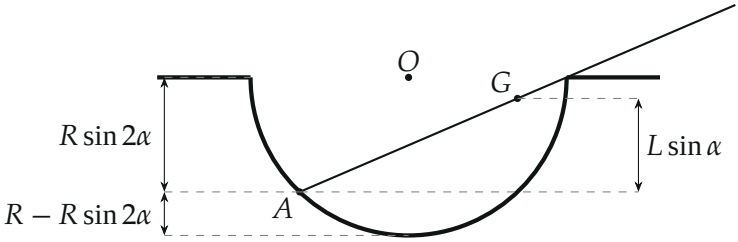
1. Углы. Угол CBD между стержнем и плоскостью — это α. Точки O, B, D лежат на одной горизонтальной прямой, а A, B, C — на одной прямой (стержне). Поэтому углы OBA и CBD вертикальные, и $\angle OBA = \alpha$.

Треугольник OAB равнобедренный ($OA = OB = R$), значит, углы при основании равны: $\angle OAB = \angle OBA = \alpha$. Горизонталь через A параллельна BD и образует со стержнем тот же угол α, поэтому прямая AO составляет с горизонталью угол $\alpha + \alpha = 2\alpha$.



Углы: $\angle CBD = \angle OBA = \alpha$ (вертикальные), $\angle OAB = \alpha$ (равнобедренный треугольник), AO составляет с горизонталью 2α

2. Высоты. Точка A лежит ниже центра O на $R\sin 2\alpha$ (катет прямоугольного треугольника с гипотенузой $OA = R$ и углом 2α при A). Глубина лунки равна R, поэтому над самой нижней точкой лунки точка A находится на высоте $R - R\sin 2\alpha$. Центр тяжести G — середина стержня, $AG = L$ вдоль стержня, который наклонён под углом α к горизонту, поэтому G выше A на $L\sin\alpha$.



Высоты: A над дном лунки — $R - R\sin 2\alpha$, G над A — $L\sin\alpha$

3. Потенциальная энергия. Отсчитаем её от нижней точки лунки:

$$\Pi(\alpha) = mg\left[R(1 - \sin 2\alpha) + L\sin\alpha\right].$$

Зачем именно так: все слагаемые выражены через один угол, и остаётся найти его, при котором Π минимальна.

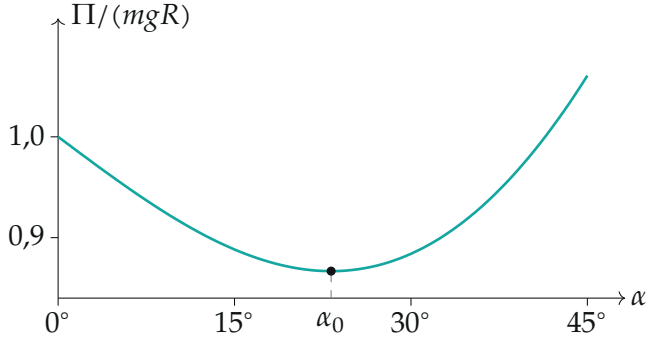
4. Минимум. Приравняем производную по α нулю:

$$\frac{d\Pi}{d\alpha} = mg(-2R\cos 2\alpha + L\cos\alpha) = 0 \quad \Longrightarrow \quad L\cos\alpha = 2R\cos 2\alpha.$$

Подставим $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ и поделим на $4R$ — получим квадратное уравнение относительно $\cos\alpha$:

$$\cos^2\alpha - \frac{L}{4R}\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{L + \sqrt{L^2 + 32R^2}}{8R}.$$

Второй корень отрицателен, а угол α острый, поэтому он не подходит. Это действительно минимум: $\Pi'' = mg\sin\alpha\,(8R\cos\alpha - L) > 0$, так как $8R\cos\alpha = L + \sqrt{L^2 + 32R^2} > L$.



$\Pi(\alpha)/(mgR)$ для $L = 1{,}5R$ (расчёт по формуле пункта 3): минимум при $\alpha_0 \approx 23{,}2°$; ось Π не от нуля

Обратите внимание. Решение существует, только пока стержень длиннее хорды $AB = 2R\cos\alpha$ и выходит за край: $L > R\cos\alpha$, то есть при $\sqrt{2/3}\,R < L < 2R$ (при $L = 2R$ получается $\alpha = 0$: стержень лежит на двух краях лунки). Если стержень короче, он целиком уйдёт в лунку и опираться на край не будет — другая картина равновесия.

Проверка. Второй способ — через силы. На стержень действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$ в точке G; сила реакции поверхности лунки $\vec{N}_A$ в точке A — перпендикулярна поверхности, то есть направлена вдоль радиуса к O; сила реакции края $\vec{N}_B$ в точке B — перпендикулярна стержню (опора острая, трения нет). Моменты относительно A: $N_B \cdot AB =$

$mg \cdot L\cos\alpha$, где $AB = 2R\cos\alpha$, откуда $N_B = \dfrac{mgL}{2R}$. Проекции сил на оси, горизонталь и вертикаль:

$$N_A\cos 2\alpha = N_B\sin\alpha, \qquad N_A\sin 2\alpha + N_B\cos\alpha = mg.$$

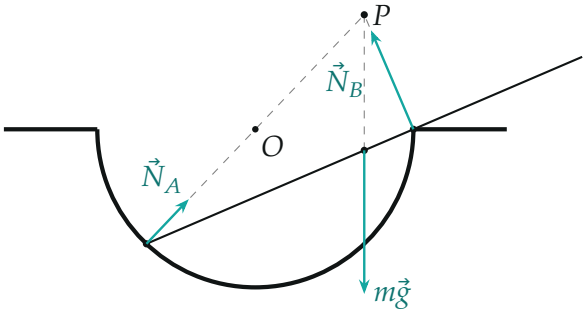
Из первого $N_A = N_B\sin\alpha/\cos 2\alpha$. Подставим во второе уравнение:

$$N_B\,\frac{\sin\alpha\sin 2\alpha + \cos\alpha\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = N_B\,\frac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha} = mg, \qquad N_B = mg\,\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}.$$

Сравниваем с $N_B = mgL/(2R)$:

$$\frac{L}{2R} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} \quad\Longleftrightarrow\quad L\cos\alpha = 2R\cos 2\alpha,$$

то же уравнение. Численно для $L = 1{,}5R$ (python): минимум П при $\alpha = 23{,}2^\circ$ и формула даёт то же; силы $N_B = 0{,}75\,mg$, $N_A = 0{,}43\,mg$, три линии действия пересекаются в одной точке.



Три силы: линии действия $m\vec{g}$, $\vec{N}_A$ (через O) и $\vec{N}_B$ (перпендикулярно стержню) сходятся в точке P

Смысл: стержень находит положение, где опускание центра тяжести уравновешено подъёмом нижнего конца вверх по стенке лунки; чем длиннее стержень, тем меньше угол α.

Ответ. $\alpha = \arccos\left(\dfrac{L + \sqrt{L^2 + 32R^2}}{8R}\right)$.