Клин у вертикальной стенки

Задача 1. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 11 класс, задача 1] «Клин у вертикальной стенки».

Около вертикальной стенки на гладком горизонтальном полу находится клин с углом наклона α. На наклонную грань клина кладут тело массой m (рисунок). Найти силу, с которой клин действует на вертикальную стенку. При каком угле α эта сила максимальна?

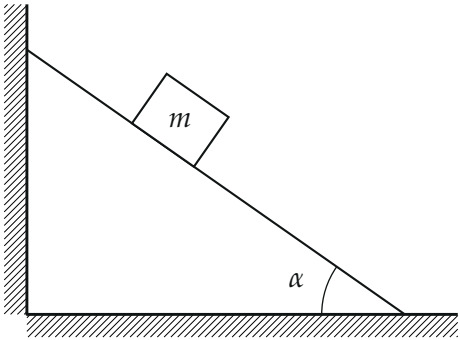
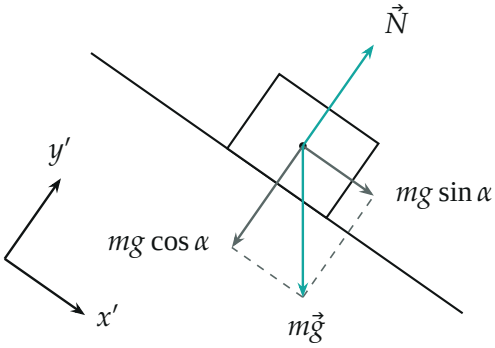


Рисунок условия: клин прижат к стенке, тело скользит по гладкой грани вниз

▲ **Решение.** **Что происходит.** Пол, стенка и грань клина гладкие, поэтому все силы реакции перпендикулярны поверхностям. Тело скользит вниз по грани и давит на неё; эта сила давления направлена внутрь клина и немного к стенке, и клин не уезжает только потому, что его держит стенка. Значит, сила давления клина на стенку (по третьему закону Ньютона она равна силе, с которой стенка давит на клин) уравновешивает горизонтальную часть силы давления тела на клин. Сначала найдём силу давления тела (тело на наклонной плоскости), потом возьмём её горизонтальную проекцию.

Обозначения. M — масса клина. $\vec{N}$ — сила, действующая на тело со стороны клина (перпендикулярна грани), $\vec{N}'$ — сила, действующая на клин со стороны тела, $N' = N$ по третьему закону Ньютона. $\vec{N}_1$ — сила стенки на клин (горизонтальна), $\vec{N}_2$ — сила пола на клин (вертикальна). Искомая сила — $F = N_1$.



Силы, действующие на тело; ось x' — вдоль грани вниз, y' — перпендикулярно ей. Серым: сила тяжести, разложенная по осям

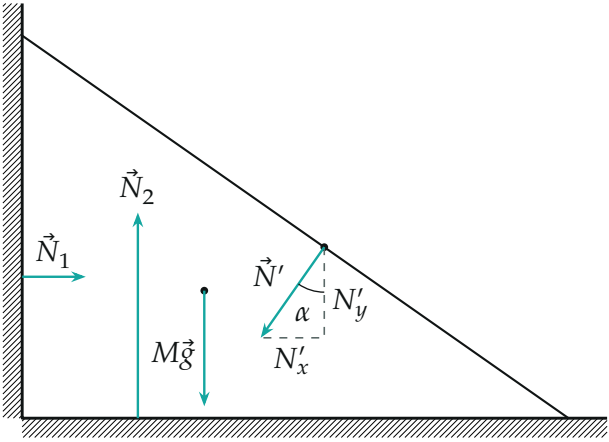
1. Сила давления тела на клин. Запишем второй закон Ньютона для тела векторно: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$. Ось x' направим вдоль грани вниз, ось y' — перпендикулярно грани, от клина. Зачем так: тело движется вдоль грани, значит, его ускорение лежит на оси x', а в проекции на y' ускорения нет, и неизвестное ускорение в уравнение не попадёт. Проекция на y' (сила тяжести повёрнута относительно оси y' на угол α):

$$0 = N - mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\alpha.$$

Обратите внимание: $N = mg\cos\alpha$, а не mg. Тело разгоняется вдоль грани, и грань уравновешивает только ту часть веса, которая направлена поперёк неё.

2. Равновесие клина. Силы, действующие на клин, показаны на рисунке ниже. Клин покоится, поэтому векторная сумма сил на него равна нулю. Выберем ось x горизонтально, от стенки, ось y — вертикально вверх. Зачем проекция на горизонталь: сил $M\vec{g}$ и $\vec{N}_2$ на ней нет, останутся только N_1 и составляющая N'_x силы $\vec{N}'$. Нормаль к грани отклонена от вертикали на тот же угол α, что и грань от горизонтали (стороны этих углов взаимно перпендикулярны), поэтому $N'_x = N'\sin\alpha$, $N'_y = N'\cos\alpha$; составляющая N'_x направлена к стенке, против оси x:

$$N_1 - N'\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = N\sin\alpha.$$



Силы на клин: $M\vec{g}$ — тяжесть, $\vec{N}'$ — давление тела, $\vec{N}_1$ — стенка, $\vec{N}_2$ — пол; серым — составляющие $\vec{N}'$

Подставим $N = mg\cos\alpha$ из пункта 1 и $F = N_1$:

$$F = mg\sin\alpha\cos\alpha = \frac{mg}{2}\sin 2\alpha.$$

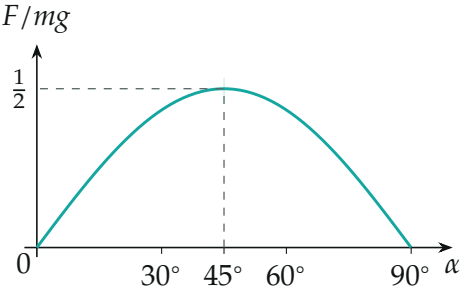
3. Второй способ. Возьмём систему «тело + клин». Клин неподвижен, тело движется вдоль грани с ускорением $a = g\sin\alpha$ (пункт 1, проекция на x'), его горизонтальная составляющая $a\cos\alpha$. По горизонтали на систему действует только сила стенки, и по теореме о движении центра масс (импульс системы по горизонтали меняется только из-за N_1):

$$N_1 = ma\cos\alpha = mg\sin\alpha\cos\alpha,$$

тот же результат.

4. При каком угле сила наибольшая. Функция $\sin 2\alpha$ наибольшая, равная единице, при $2\alpha = 90°$:

$$F_{\max} = \frac{mg}{2} \quad \text{при} \quad \alpha = 45°.$$



Сила давления клина на стенку в зависимости от угла: наибольшая при $45°$

Проверка. Размерность: mg — сила, $\sin 2\alpha$ безразмерен, верно. Предельные случаи: при $\alpha \to 0$ грань почти горизонтальна, тело давит на клин почти вертикально ($N \approx mg$), горизонтальной части у этой силы нет, $F \to 0$; при $\alpha \to 90°$ грань почти вертикальна, тело почти свободно падает вдоль неё и давит на клин всё слабее ($N \to 0$), $F \to 0$. Между ними сила имеет максимум — при $45°$, где оба множителя $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ равны.

Смысл: стенка удерживает клин ровно тогда, когда тело разгоняет само себя вдоль грани; сильнее всего толчок получается при среднем угле.

Ответ. $F = \dfrac{mg}{2}\sin 2\alpha$; максимальна при $\alpha = 45°$, $F_{\max} = \dfrac{mg}{2}$.