Скольжение по полусфере, гладкая и шероховатая половины

Задача 2. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 11 класс, задача 2] «Скольжение по полусфере, гладкая и шероховатая половины».

Точечное тело соскальзывает по внутренней поверхности полусферы с высоты, равной её радиусу (см. рисунок). Одна половина полусферы (та, по которой тело начало движение) — гладкая, на второй между телом и поверхностью действует сила трения (коэффициент трения μ). Найти ускорение тела в тот момент, когда оно только перешло на шероховатую поверхность.

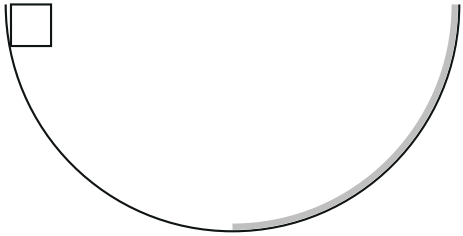
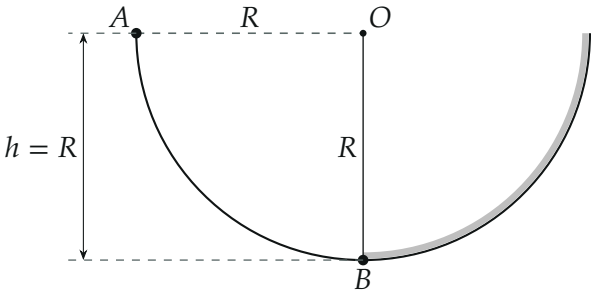


Рисунок условия: серым выделена шероховатая половина полусферы

▲ **Решение. Что происходит.** Движение идёт в две стадии. На гладкой половине энергия сохраняется: сила реакции перпендикулярна скорости и работы не совершает, работает только сила тяжести. В нижней точке тело попадает на шероховатый участок, скорость при этом не меняется скачком (сила трения конечна), но появляется сила трения, и ускорение тела сразу меняется. Оно складывается из двух перпендикулярных частей: нормальной (центростремительной), которая зависит только от скорости, и тангенциальной, которую создаёт сила трения. Найдём обе и сложим.

Обозначения. R — радиус полусферы, O — её центр, v — скорость тела в нижней точке B, N — сила реакции поверхности, $F_{\text{тр}}$ — сила трения, a_n и a_τ — нормальное и тангенциальное ускорения. Нулевой уровень потенциальной энергии — нижняя точка.



Тело начинает движение в точке A на высоте R над нижней точкой B

1. Скорость в нижней точке. Применим закон сохранения механической энергии для тела между точкой A (скорость нулевая, высота R) и точкой B (скорость v, высота нуль). Зачем энергия: путь по дуге неизвестен и сила реакции меняется, но N работы не совершает и трения на этом участке нет, так что энергия сохраняется:

$$mgR = \frac{mv^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gR.$$

2. Нормальное ускорение. В нижней точке тело движется по окружности радиуса R со скоростью v, поэтому нормальное (центростремительное) ускорение направлено к центру O, то есть вверх:

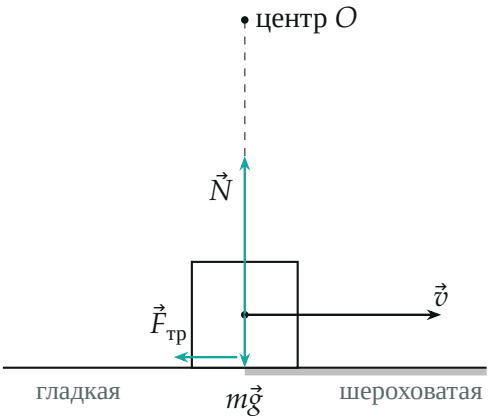
$$a_n = \frac{v^2}{R} = 2g.$$

3. Сила реакции. Запишем второй закон Ньютона для тела в проекции на направление к центру (вверх). Зачем именно эта проекция: сила трения направлена по касательной (по горизонтали), и в проекцию на вертикаль не входит; неизвестной останется только N:

$$ma_n = N - mg \quad \Rightarrow \quad N = m(g + 2g) = 3mg.$$

Обратите внимание: $N = 3mg$, а не mg. Тело не просто стоит на поверхности, оно ещё и поворачивает вместе с ней, и поверхность давит втрое сильнее веса. Сила трения лежит вдоль касательной и в проекцию на радиус не входит, поэтому $N = 3mg$ и сразу справа от точки B, где трение

уже есть, и слева от неё.



Силы в нижней точке сразу после перехода (для рисунка взято $\mu = 0{,}4$: $N = 3mg$, $F_{тр} = 1{,}2\,mg$)

4. Тангенциальное ускорение. Тело скользит по шероховатой поверхности, поэтому по закону Кулона — Амонтона $F_{\text{тр}} = \mu N$ (при скольжении трение определяется только силой реакции). Сила трения направлена против скорости, то есть по касательной:

$$F_{\text{тр}} = \mu N = 3\mu mg.$$

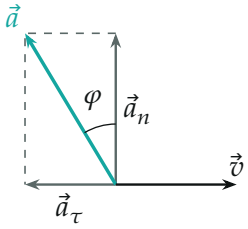
Запишем второй закон Ньютона в проекции на касательную: сила тяжести и сила реакции на неё не проектируются, остаётся одна сила трения:

$$ma_\tau = F_{\text{тр}} \quad \Rightarrow \quad a_\tau = 3\mu g,$$

и $\vec{a}_\tau$ направлено против скорости, тело тормозится.

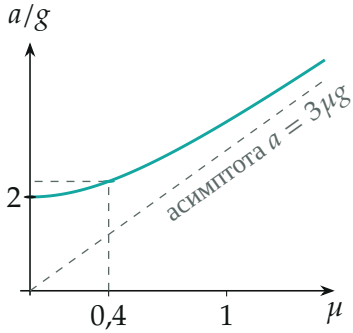
5. Полное ускорение. Нормальная и тангенциальная части взаимно перпендикулярны, поэтому складываются по теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{4g^2 + 9\mu^2 g^2} = g\sqrt{4 + 9\mu^2}.$$



Ускорение сразу после перехода (для рисунка $\mu = 0{,}4$: $a_n = 2g$, $a_\tau = 1{,}2g$, $a \approx 2{,}33\,g$, угол $\varphi \approx 31°$)

Направление ускорения: оно отклонено от вертикали (то есть от направления к центру) на угол φ, где $\operatorname{tg}\varphi = a_\tau/a_n = \frac{3}{2}\mu$.



Ускорение сразу после перехода как функция коэффициента трения: при $\mu = 0$ оно равно $2g$

Проверка. Размерность: g — ускорение, μ безразмерен, верно. Предельный случай: при $\mu = 0$ получаем $a = 2g$ — одно центростремительное ускорение, как и должно быть на гладкой поверхности. При большом μ тангенциальная часть становится главной, $a \approx 3\mu g$. Второй способ для силы реакции: тело, прошедшее по гладкой дуге вниз на высоту h, давит на дно с силой $N = mg + 2mgh/R$ ($h = R$ даёт $3mg$) — то же значение.

Смысл: скорость в точке перехода непрерывна, а ускорение — нет: к центростремительному $2g$ мгновенно добавляется тангенциальное $3\mu g$, потому что появилась сила трения.

Ответ. $a = g\sqrt{4 + 9\mu^2}$.