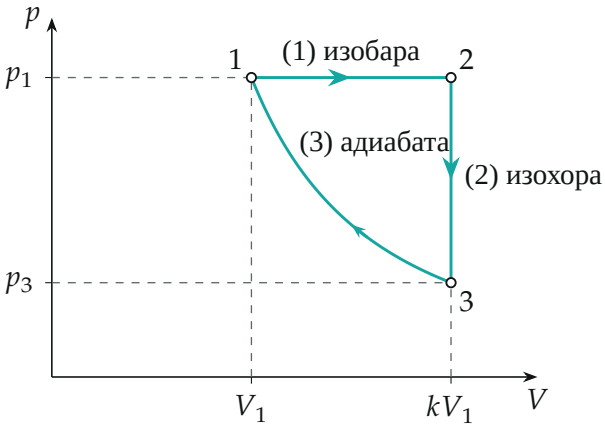
КПД цикла: изобара, изохора, адиабата

Задача 3. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 11 класс, задача 3] «КПД цикла: изобара, изохора, адиабата».

С одноатомным идеальным газом проводят следующий циклический процесс. (1) Изобарическое расширение. (2) Изохорическое охлаждение. (3) Адиабатическое сжатие, в результате которого газ возвращается в начальное состояние. Известно, что работа газа в изобарическом процессе была в n раз больше изменения внутренней энергии газа в адиабатическом процессе. Найти КПД цикла.



Цикл в координатах p–V (для рисунка взято $k = 2$): 1 — изобара, 2 — изохора, 3 — адиабата

▲ **Решение. Что происходит.** КПД цикла — это работа за цикл, делённая на теплоту, которую газ получил от нагревателя: $\eta = A_c/Q_н$. Газ получает теплоту только на изобаре (1): там его температура растёт и он расширяется. На изохоре (2) газ охлаждается и теплоту отдаёт, работы не совершает. Адиабата (3) идёт без теплообмена, газ над ним совершает отрицательную работу. Все величины выразим через работу A газа на изобаре — она задана в условии.

Обозначения. A — работа газа в изобарическом процессе (1), $\Delta U_{ад}$ — изменение внутренней энергии газа в адиабатическом процессе (3),

$Q_н$ — теплота, полученная от нагревателя, $Q_х$ — теплота, отданная холодильнику, A_c — работа газа за цикл. По условию $A = n\,\Delta U_{ад}$.

1. Теплота, полученная на изобаре. Первый закон термодинамики для процесса (1): $Q_н = \Delta U_{12} + A$. Для одноатомного идеального газа $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\,\Delta T$, а на изобаре работа $A = p\,\Delta V = \nu R\,\Delta T$ (уравнение Менделеева — Клапейрона для двух состояний при $p = \text{const}$). Значит, $\Delta U_{12} = \frac{3}{2}A$ и

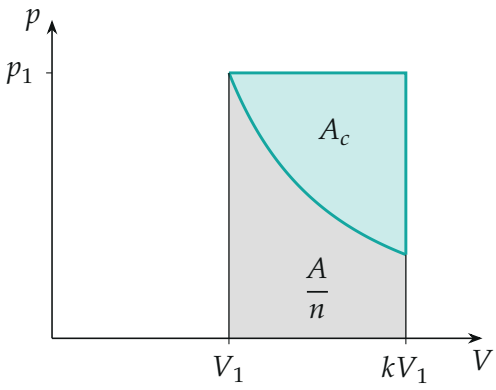
$$Q_н = \frac{3}{2}A + A = \frac{5}{2}A.$$

Газ получает теплоту: на изобаре он и нагревается, и расширяется.

2. Работа на адиабате. В процессе (3) теплоты нет, $Q = 0$, поэтому по первому закону $A_{ад} = -\Delta U_{ад}$. Газ сжимают, и внутренняя энергия растёт: $\Delta U_{ад} = \dfrac{A}{n} > 0$. Работа газа отрицательна:

$$A_{ад} = -\frac{A}{n},$$

то есть над газом внешние силы совершили работу A/n.



Площадь под изобарой — работа A. Серая часть — площадь под адиабатой, работа внешних сил A/n. Бирюзовая — работа газа за цикл

3. Работа за цикл. На изохоре (2) объём не меняется, работа равна

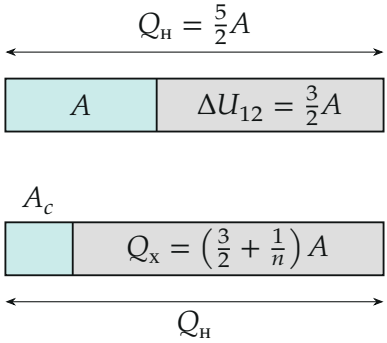
нулю. Работа за цикл — сумма работ на трёх участках:

$$A_c = A + 0 - \frac{A}{n} = A\,\frac{n-1}{n}.$$

Это ровно бирюзовая площадь на втором рисунке: площадь под изобарой минус площадь под адиабатой.

4. КПД. Подставим найденные величины в определение:

$$\eta = \frac{A_c}{Q_\text{н}} = \frac{A\,(n-1)/n}{5A/2} = \frac{2(n-1)}{5n}.$$



Вверху: теплота $Q_н$ на изобаре идёт на работу A и на рост внутренней энергии. Внизу: за цикл она делится на работу A_c и теплоту $Q_х$, отданную холодильнику (рисунок для $n \approx 1{,}8$)

5. Второй способ: через теплоту холодильника. За цикл газ возвращается в исходное состояние, поэтому изменение внутренней энергии за цикл равно нулю: $\Delta U_{12} + \Delta U_{23} + \Delta U_\text{ад} = 0$. Отсюда на изохоре

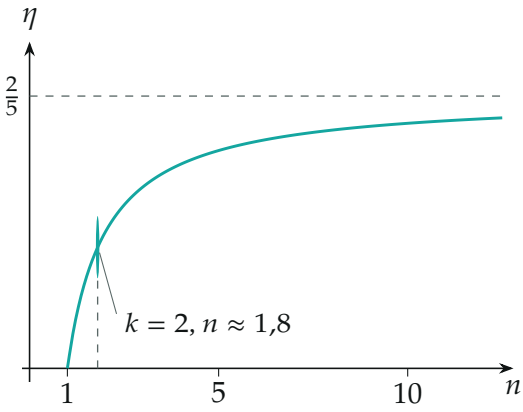
$$\Delta U_{23} = -\left(\frac{3}{2}A + \frac{A}{n}\right), \qquad Q_\text{х} = -\Delta U_{23} = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{n}\right)A,$$

(работы на изохоре нет, и вся отданная теплота равна убыли внутренней

энергии). Тогда

$$\eta = 1 - \frac{Q_\text{х}}{Q_\text{н}} = 1 - \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{n}}{\frac{5}{2}} = \frac{2(n-1)}{5n},$$

тот же результат.



КПД как функция n: при $n \to 1$ работа за цикл стремится к нулю, при больших n КПД приближается к $2/5$

Проверка. Размерность: η безразмерен. При $n \to 1$ работа на изобаре почти равна работе над газом на адиабате, $A_c \to 0$ и $\eta \to 0$, как у вырожденного цикла; при $n \to \infty$ получаем $\eta \to \frac{2}{5}$ (работа A из теплоты $\frac{5}{2}A$), и всегда $\eta < 1$. Числа: при $k = V_2/V_1 = 2$ адиабата даёт $p_3 = 2^{-5/3}p_1$, $n = \dfrac{k-1}{\frac{3}{2}\left(1 - k^{-2/3}\right)} \approx 1{,}80$, а прямой подсчёт КПД по площади цикла даёт 0,178 — как и формула $\dfrac{2(n-1)}{5n}$.

У организаторов в ответе стоит $\dfrac{5(n-1)}{2n}$: дробь $\frac{5}{2}$ попала в числитель, хотя теплота $Q_\text{н} = \frac{5}{2}A$ стоит в знаменателе; такой «КПД» при $n > \frac{5}{3}$ был бы больше единицы.

Смысл: адиабатное сжатие «забирает» часть работы изобары; чем слабее оно меняет энергию (больше n), тем ближе КПД к предельным $2/5$.

Ответ. $\eta = \dfrac{2(n-1)}{5n}$.