Цепь с перемычкой между узлами

Задача 4. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 11 класс, задача 4] «Цепь с перемычкой между узлами».

Электрическая цепь, схема которой дана на рисунке, состоит из двух одинаковых резисторов R_1, двух одинаковых резисторов R_2, идеального источника напряжения и идеального амперметра. Известно, что если соединить проводом, не имеющим сопротивления, точки A и D, амперметр покажет силу тока $I_1 = 0{,}25$ А. Если соединить проводом, не имеющим сопротивления, точки B и D, амперметр покажет силу тока $I_2 = 0{,}2$ А. Найти отношение сопротивлений резисторов. Какую силу тока покажет амперметр, если соединить проводом, не имеющим сопротивления, точки C и D?

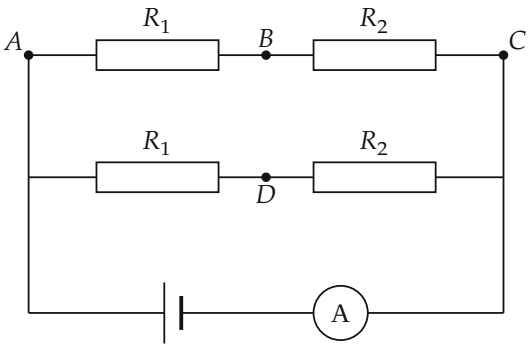
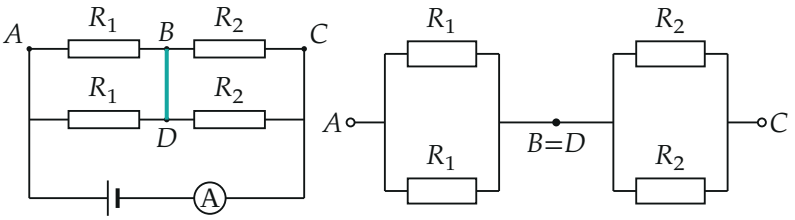


Рисунок условия

▲ **Решение. Что происходит.** Источник и амперметр идеальные, поэтому амперметр показывает ток источника $I = U/R_{\text{полн}}$, где U — напряжение источника, $R_{\text{полн}}$ — сопротивление всей цепи между A и C. Провод без сопротивления делает две точки одной: их потенциалы равны. В каждом из трёх случаев перерисуем схему с объединёнными узлами и найдём $R_{\text{полн}}$. Токи I_1, I_2 дадут отношение сопротивлений, оно — третий ток; U при делении сократится (класс задачи: эквивалентные схемы и отношение токов).

Обозначения. R_{AD}, R_{BD}, R_{CD} — сопротивление всей цепи, когда провод соединяет соответствующие точки; I_1, I_2, I_3 — токи амперметра при соединении AD, BD, CD.

1. Провод между B и D. Верхняя и средняя ветви одинаковы, поэтому потенциалы B и D равны даже без провода. Провод между ними не меняет цепь: схема — два резистора R_1 параллельно, последовательно с двумя резисторами R_2 параллельно.

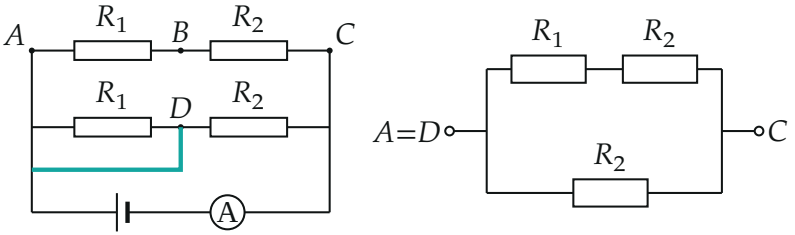


Случай BD: слева схема с проводом (бирюзовым), справа та же схема с узлом B=D

Резисторы с одним значением, включённые параллельно, дают половину сопротивления. Закон Ома для всей цепи:

$$R_{BD} = \frac{R_1}{2} + \frac{R_2}{2}, \qquad I_2 = \frac{U}{R_{BD}} = \frac{2U}{R_1 + R_2}.$$

2. Провод между A и D. Левый конец среднего R_1 — точка A (левый провод), правый — D. Если A и D соединены, напряжение на этом резисторе равно нулю, он выключен: ток идёт мимо него по проводу. Остаются две параллельные ветви между A и C: верхняя $R_1 + R_2$ (последовательно) и нижняя R_2 (средний R_2).



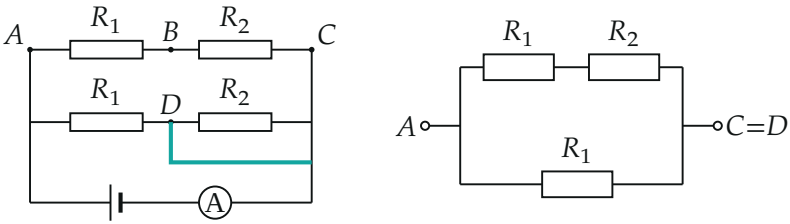
Случай AD: R_1 средней ветви закорочен

$$R_{AD} = \frac{(R_1 + R_2)R_2}{R_1 + 2R_2}, \qquad I_1 = \frac{U}{R_{AD}} = \frac{U\,(R_1 + 2R_2)}{(R_1 + R_2)R_2}.$$

3. Отношение сопротивлений. Разделим I_1 на I_2: напряжение U сократится.

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_1 + 2R_2}{2R_2} = 1 + \frac{R_1}{2R_2} \quad \Rightarrow$$
$$\frac{R_1}{R_2} = 2\left(\frac{I_1}{I_2} - 1\right) = 2\left(\frac{0{,}25}{0{,}2} - 1\right) = \frac{1}{2}.$$

4. Провод между C и D. Теперь провод соединяет правый конец среднего R_2 с правым проводом, то есть с точкой C: средний R_2 закорочен, остаётся ветвь с одним R_1.



Случай CD: R_2 средней ветви закорочен

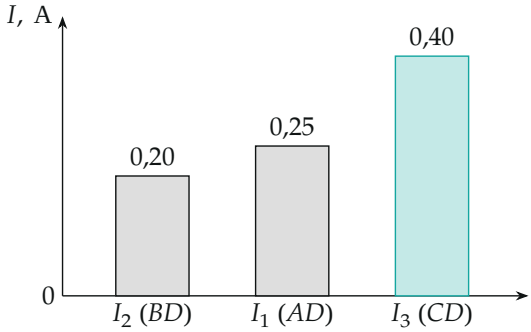
$$R_{CD} = \frac{(R_1 + R_2)R_1}{2R_1 + R_2}, \qquad I_3 = \frac{U}{R_{CD}} = \frac{U\,(2R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)R_1}.$$

Разделим I_3 на I_2 и подставим $R_1/R_2 = \frac{1}{2}$:

$$\frac{I_3}{I_2} = \frac{2R_1 + R_2}{2R_1} = 1 + \frac{R_2}{2R_1} = 1 + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad I_3 = 2I_2 = 0{,}4\ \text{А}.$$

В общем виде $I_3 = \dfrac{(4I_1 - 3I_2)\,I_2}{4(I_1 - I_2)}$.

Обратите внимание: провод между B и D ничего не закорачивает, потому что потенциалы этих точек и так равны; закорачивают провода AD и CD — они соединяют точки разных потенциалов.



Показания амперметра в трёх случаях: чем меньше полное сопротивление, тем больше ток ($R_{CD} < R_{AD} < R_{BD}$)

Проверка. Размерность: R_1/R_2 безразмерно, I_3 в амперах. Второй способ — числами: пусть $R_1 = R$, $R_2 = 2R$. Тогда

$$R_{BD} = \frac{R + 2R}{2} = 1{,}5R, \qquad R_{AD} = \frac{3R \cdot 2R}{5R} = 1{,}2R,$$
$$R_{CD} = \frac{3R \cdot R}{4R} = 0{,}75R.$$

Токи обратно пропорциональны сопротивлениям:

$$I_1 : I_2 : I_3 = \frac{1}{1{,}2} : \frac{1}{1{,}5} : \frac{1}{0{,}75} = 1{,}25 : 1 : 2.$$

При $I_2 = 0{,}2$ А получаем $I_1 = 0{,}25$ А, как в условии, и $I_3 = 0{,}4$ А. Порядок токов $I_2 < I_1 < I_3$ совпадает с порядком сопротивлений $R_{BD} > R_{AD} > R_{CD}$.

Смысл: перемычка между A и D или C и D убирает один из резисторов, и общее сопротивление падает; перемычка между равнопотенциальными B и D цепь не меняет.

Ответ. $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{1}{2}$; при соединении C и D амперметр покажет $I_3 = 0{,}4$ А.