Лодка по замкнутому маршруту A-B-C

Задача 5. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 11 класс, задача 5] «Лодка по замкнутому маршруту A-B-C».

Три города A, B и C расположены на берегу реки, расстояние между берегами которой равно h. Города A и C расположены на одном берегу, и отрезок AC равен удвоенному расстоянию между берегами. Город B расположен на другом берегу реки так, что его «проекция» на другой берег находится ровно посередине между городами A и C (см. рисунок). Между городами по замкнутому пути плывёт лодка, скорость которой в стоячей воде в два раза больше скорости течения. Сначала лодка плывёт по маршруту A–C–B–A, причём участки траектории лодки AC и BC — прямые, участок CB — четверть окружности радиуса h (см. рисунок). Потом лодка плывёт по тому же маршруту, но проходит его в обратном направлении A–B–C–A (см. рисунок). На какой из них — A–B–C–A или A–C–B–A — лодка затратит меньшее время и во сколько раз? Направление течения реки показано стрелкой.

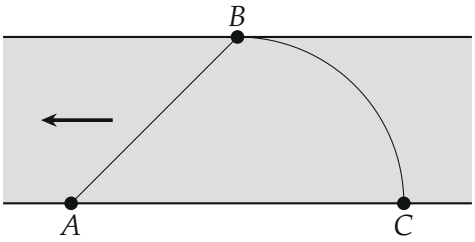


Рисунок условия: течение направлено влево; между A и C маршрут идёт вдоль берега

▲ **Решение.** **Что происходит.** Течение помогает лодке на одних участках пути и мешает на других, поэтому сравнивать времена обхода «в лоб» — значит считать три разных участка в двух направлениях. Главная идея задачи — разбить путь на малые прямые элементы и сравнить время прохождения одного элемента «вперёд» и «назад». Оказывается, эта разность зависит только от проекции элемента на направление течения, и она не зависит от формы пути. А у замкнутого пути сумма про-

екций равна нулю, значит, разности времён сокращаются. Ответ можно получить, вообще не считая время по участкам.

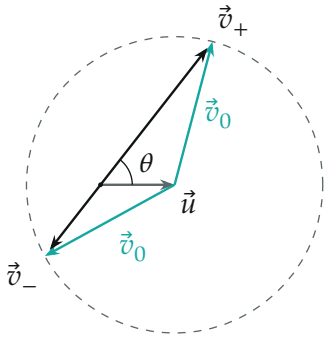
Обозначения. u — скорость течения, $v_0 = 2u$ — скорость лодки в стоячей воде, $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$ — скорость лодки относительно берега (закон сложения скоростей). Ось x направим вдоль течения. По рисунку: AC идёт вдоль берега, AB — отрезок, CB — четверть окружности радиуса h с центром в середине AC. Элемент пути длиной ds составляет угол θ с направлением течения; v_+ — скорость лодки относительно берега, когда она идёт по элементу вперёд, v_- — назад.

1. Скорость лодки относительно берега на элементе. Модуль v_0 известен, а направление $\vec{v}_0$ неизвестно: лодка при необходимости «подруливает». Известно направление $\vec{v}$ — по касательной к траектории. Векторы $\vec{u}$, $\vec{v}_0$, $\vec{v}$ образуют треугольник со сторонами u, v_0, v, угол между $\vec{u}$ и $\vec{v}$ равен θ. По теореме косинусов $v_0^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta$, откуда

$$v_+ = u\cos\theta + \sqrt{v_0^2 - u^2\sin^2\theta}$$

(положительный корень: скорость вдоль пути положительна). В обратную сторону направление пути поворачивается на 180°, $\cos\theta$ меняет знак:

$$v_- = -u\cos\theta + \sqrt{v_0^2 - u^2\sin^2\theta}.$$



Скорости на элементе пути: $\vec{v}_+$ (вперёд) и $\vec{v}_-$ (назад) — две точки пересечения прямой, проходящей через O вдоль элемента, с окружностью радиуса v_0 вокруг конца $\vec{u}$

2. Разность времён на элементе. Время на элементе вперёд и назад — $dt_+ = ds/v_+$ и $dt_- = ds/v_-$. Произведение $v_+v_- = v_0^2 - u^2\sin^2\theta - u^2\cos^2\theta = v_0^2 - u^2$ не зависит от θ (разность квадратов), а $v_+ - v_- = 2u\cos\theta$. Поэтому

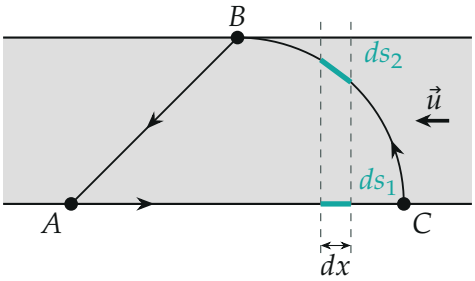
$$dt_- - dt_+ = ds\,\frac{v_+ - v_-}{v_+v_-} = \frac{2u\,ds\cos\theta}{v_0^2 - u^2} = \frac{2u}{v_0^2 - u^2}\,dx,$$

где $dx = ds\cos\theta$ — проекция элемента на ось x (знак: по ходу движения вперёд). Форма пути вошла только через dx.

3. Замкнутый путь. Обойдём весь маршрут $A \to C \to B \to A$ вперёд и назад. Сложим разности времён всех элементов:

$$T_- - T_+ = \frac{2u}{v_0^2 - u^2}\oint dx = 0,$$

потому что при обходе замкнутого контура сумма проекций на ось x равна нулю — мы вернулись в исходную точку. Значит, обход в одну и другую сторону занимает одно и то же время.



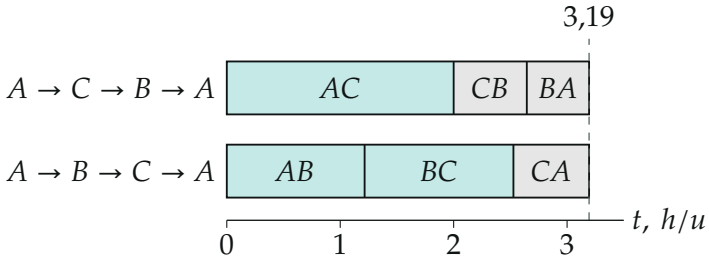
Между двумя близкими перпендикулярами к берегам маршрут $A \to C \to B \to A$ пересекается дважды: элемент ds_1 на берегу лодка проходит вправо, элемент ds_2 на дуге — влево; проекции dx у них равны по модулю и противоположны по знаку

4. Числа для наглядности. Время на участках считаем по формуле для $v_\pm$ (на дуге — интегрируя по ds). Здесь $v_0 = 2u$, единица времени h/u. По берегу: AC против течения — $2h/(v_0 - u) = 2$, CA по течению

$-2h/(v_0+u) = \frac{2}{3}$. Остальное — численно:

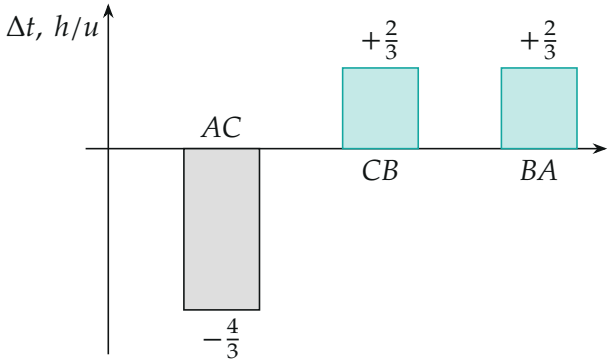
$$t_{AB} \approx 1{,}215,\ t_{BA} \approx 0{,}549; \qquad t_{BC} \approx 1{,}312,\ t_{CB} \approx 0{,}645.$$

Маршрут $A \to C \to B \to A$: $2 + 0{,}645 + 0{,}549 \approx 3{,}194$. Маршрут $A \to B \to C \to A$: $1{,}215 + 1{,}312 + 0{,}667 \approx 3{,}194$.



Время по участкам при обходе в двух направлениях (бирюзовым — участки, где лодка идёт в основном против течения): общее время одно и то же

Разности по участкам (обратный обход минус прямой): AC даёт $\frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$, CB — $+\frac{2}{3}$, BA — $+\frac{2}{3}$. Сумма равна нулю — ровно как в пункте 3.



Разность времён «обратно минус вперёд» по участкам: $-\frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$

Проверка. Размерность: разность времён $\dfrac{2u\,dx}{v_0^2 - u^2}$ — длина, делённая на скорость, верно. Без течения ($u = 0$) разность $dt_- - dt_+ = 0$ для

любого элемента, времена равны очевидно. Для нашего маршрута численный подсчёт по формуле (1) даёт $3{,}194\,h/u$ в обоих направлениях; суммы по участкам совпадают до шестого знака.

Обратите внимание: вывод работает, пока $v_0 > u$, то есть лодка может идти в любую сторону; по условию $v_0 = 2u$. Значения v_0 и u в итог не входят: ответ не зависит от скоростей и формы маршрута, важно только, что он замкнут.

Смысл: течение выигрывает на одной части контура ровно столько же, сколько проигрывает на другой, и от направления обхода ничего не зависит.

Ответ. Времена одинаковы: на каждом из маршрутов лодка затратит одно и то же время, отношение времён равно 1.