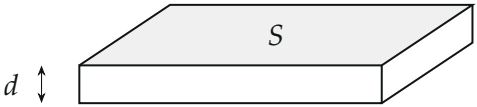
Поверхностная плотность бумаги

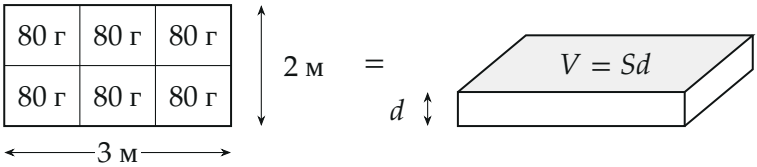
Задача 1. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 7 класс, задача 1] На пачках бумаги для офисной техники написана так называемая поверхностная плотность бумаги $\sigma = 80$ г/м^2, представляющая собой массу 1 квадратного метра бумаги заданной толщины. Найти толщину этой бумаги, если обычная (в этом контексте объёмная) плотность офисной бумаги составляет $\rho = 800$ кг/м^3.



Поясняющий рисунок: лист бумаги — тонкая плита площадью S и толщиной d (толщина на рисунке сильно преувеличена)

▲ **Решение. Что происходит.** Поверхностная плотность σ — это масса одного квадратного метра листа, а объёмная ρ — масса одного кубического метра самого вещества. Лист бумаги — тонкая плита: чем она толще, тем больше вещества приходится на квадратный метр и тем тяжелее этот квадратный метр. Главная идея — записать массу листа двумя способами, через σ и через ρ, и приравнять.

Обозначения. S — площадь листа, d — его толщина, m — масса листа, $V = Sd$ — объём листа (плита: площадь основания на высоту).



Одна и та же масса листа, посчитанная двумя способами. Слева: лист из шести квадратных метров, на каждом $\sigma \cdot 1$ м$^2 = 80$ г. Справа: тот же лист как тело объёмом $V = Sd$ из вещества плотности ρ

1. Масса через поверхностную плотность. По определению $\sigma = m/S$, поэтому масса листа любой площади

$$m = \sigma S.$$

Для $S = 1$ м^2 получается 0,080 кг — ровно то, что написано на пачке.

2. Масса через объёмную плотность. Бумага однородна, поэтому $\rho = m/V$. Лист — плита с объёмом $V = Sd$, откуда

$$m = \rho V = \rho S d.$$

3. Приравниваем. Лист один и тот же, масса у него одна:

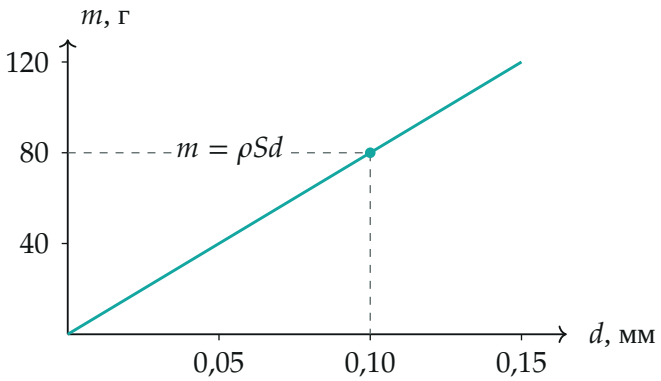
$$\sigma S = \rho S d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\sigma}{\rho}.$$

Площадь сократилась: толщина бумаги не зависит от размера листа, лист А4 и лист А3 одной и той же бумаги одинаково толстые. Получилась и привычная картина: чем плотнее бумага (ρ больше), тем тоньше слой при той же массе квадратного метра.

4. Подставляем числа. Переведём всё в СИ: $\sigma = 80$ г/м^2 $= 0{,}080$ кг/м^2. Тогда

$$d = \frac{0{,}080 \text{ кг/м}^2}{800 \text{ кг/м}^3} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0{,}1 \text{ мм}.$$

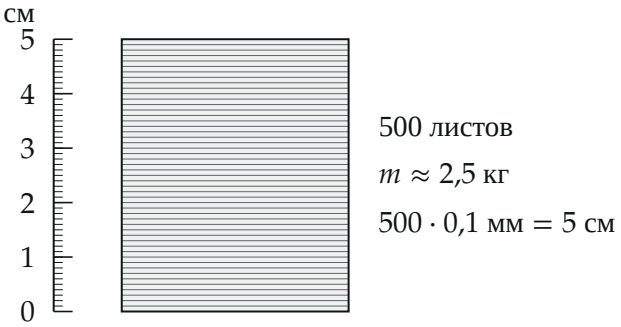
Обратите внимание: граммы в σ и килограммы в ρ — разные единицы массы. Просто разделить 80 на 800 нельзя: ответ получится в тысячу раз больше. Сначала приводим обе величины к одной системе единиц.



Масса 1 м² бумаги плотности 800 кг/м³ в зависимости от толщины: прямая $m = 800$ г/мм · d; точка — наша бумага, 80 г при $d = 0{,}1$ мм

Второй способ: только граммы и метры. Переведём плотность: $\rho = 800$ кг/м^3 $= 8 \cdot 10^5$ г/м^3. Квадратный метр бумаги — слой объёмом 1 м$^2 \cdot d$ и массой $\rho \cdot 1$ м$^2 \cdot d = 80$ г. Отсюда $d = \dfrac{80\text{ г}}{8 \cdot 10^5\text{ г/м}^3 \cdot 1\text{ м}^2} = 10^{-4}$ м — тот же результат.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{кг/м}^2}{\text{кг/м}^3} = $ м — толщина, как и должно быть. Правдоподобие: лист А4 имеет площадь $0{,}21 \cdot 0{,}297 \approx 0{,}062$ м^2 и массу $0{,}062 \cdot 80$ г ≈ 5 г; в пачке 500 таких листов толщиной $500 \cdot 0{,}1$ мм $= 5$ см и массой 2,5 кг — именно так выглядит настоящая пачка офисной бумаги.



Проверка на пачке: 500 листов толщиной 0,1 мм складываются в стопку высотой 5 см (линии на стопке — по десять листов)

Смысл. Поверхностная плотность бумаги и толщина листа — одна и та же информация, записанная через разные величины: $\sigma = \rho d$. Зная плотность материала, толщину тонкого листа (бумаги, фольги, плёнки) можно получить, просто взвесив известную площадь.

Ответ. $d = \dfrac{\sigma}{\rho} = 0{,}1$ мм.