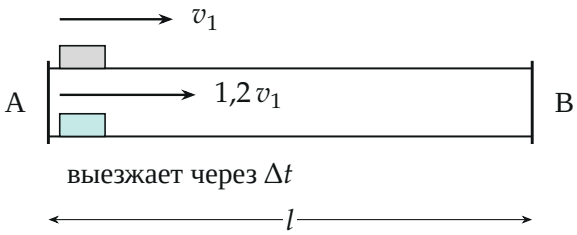
Две машины из A в B

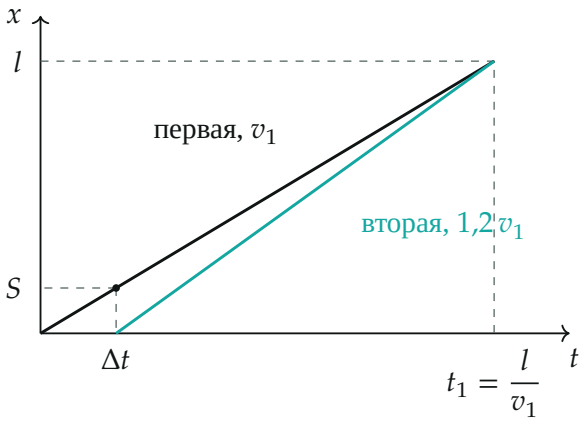
Задача 2. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 7 класс, задача 2] Из города A в город B, расстояние между которыми l, со скоростью v_1 выехала машина. Через некоторое время Δt из города A в город B со скоростью $1{,}2\,v_1$ выехала вторая машина. Известно, что в город B машины приехали одновременно. Считая, что в течение всего времени движения машины ехали с постоянными скоростями, найти Δt.



Поясняющий рисунок: две машины едут из A в B по одной дороге (для наглядности — по разным полосам); вторая выезжает на время Δt позже

▲ **Решение. Что происходит.** Вторая машина едет быстрее первой, но выехала позже, и в B они оказались одновременно. Значит, быстрая машина «выиграла» на дороге как раз то время, которое простояла в A, — время Δt. Главная идея задачи — записать время в пути каждой машины и вычесть одно из другого.

Обозначения. Время отсчитываем от выезда первой машины. t_1 — время в пути первой машины, t_2 — время в пути второй (от её выезда до приезда в B). Обе машины едут равномерно, поэтому время пути равно длине пути, делённой на скорость.



Графики координаты x (расстояние от A): вторая машина стартует в момент Δt, когда первая уже проехала $S = v_1 \Delta t$, идёт круче и в B оказывается одновременно с первой

1. Первая машина. Она проезжает весь путь l со скоростью v_1:

$$t_1 = \frac{l}{v_1}.$$

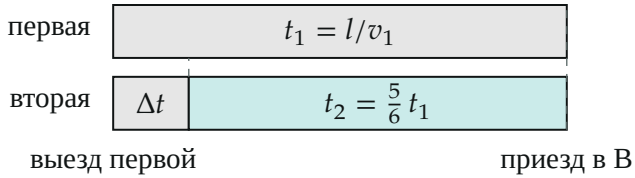
2. Вторая машина. Она тоже проезжает путь l, но со скоростью $1{,}2\,v_1$:

$$t_2 = \frac{l}{1{,}2\,v_1} = \frac{5}{6}\frac{l}{v_1}.$$

Обратите внимание: время ожидания Δt в t_2 не входит — вторая машина стояла в A, а не ехала.

3. Одновременный приезд. Первая машина приехала в момент t_1. Вторая выехала в момент Δt и ехала t_2, значит, приехала в момент $\Delta t + t_2$. Моменты приезда равны:

$$t_1 = \Delta t + t_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = t_1 - t_2.$$



Время в пути (отсчёт от выезда первой): вторая стоит Δt и едет t_2, в сумме — столько же, сколько едет первая

4. Результат. Подставляем t_1 и t_2:

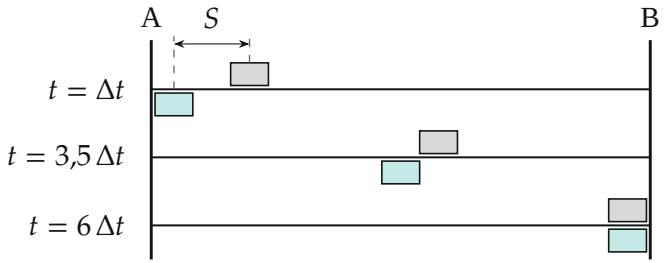
$$\Delta t = \frac{l}{v_1} - \frac{5}{6}\,\frac{l}{v_1} = \frac{l}{6\,v_1}.$$

Задержка составляет шестую часть времени, за которое первая машина проезжает весь путь.

Второй способ: погоня. В момент выезда второй машины первая уже на расстоянии $S = v_1\Delta t$ впереди. Вторая быстрее на $0{,}2\,v_1$, поэтому расстояние между машинами сокращается с этой скоростью. По условию машины встречаются именно в B, то есть вторая успевает догнать первую ровно за время τ, за которое сама проезжает l:

$$\tau = \frac{S}{0{,}2\,v_1} = 5\Delta t, \qquad l = 1{,}2\,v_1\tau = 6\,v_1\Delta t.$$

Отсюда $\Delta t = \dfrac{l}{6\,v_1}$ — ответ тот же.



Погоня в единицах $v_1\Delta t$ ($l = 6$ таких единиц): первая машина — серая, вторая — бирюзовая; промежуток S сокращается на $0{,}2$ за каждое Δt и в B обращается в ноль

Проверка. Размерность: $\dfrac{l}{v_1}$ — время. Предельные случаи удобно смотреть по общей формуле для второй машины со скоростью $k\,v_1$: $\Delta t = \dfrac{l}{v_1}\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$. При $k = 1$ получаем $\Delta t = 0$: машины одинаковы и выезжают вместе. При $k = 2$ — $\Delta t = \dfrac{l}{2v_1}$: вдвое более быстрой машине хватает половины времени, она выезжает на полпути по времени. При $k = 1{,}2$ — наш ответ.

Смысл. Опоздание быстрой машины должно в точности равняться её выигрышу во времени на всём пути, $t_1 - t_2$.

Ответ. $\Delta t = \dfrac{l}{6\,v_1}$.