Система из восьми блоков

Задача 4. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 7 класс, задача 4] На столе находятся 8 блоков — 4 неподвижных и 4 подвижных. Система блоков показана на рисунке (вид сверху): подвижные блоки — крупные, неподвижные — маленькие. Через блоки перекинута верёвка так, как это показано на рисунке, а к одному из подвижных блоков прикреплён груз. В некоторый момент времени три подвижных блока начинают тянуть со скоростями v, $2v$ и $3v$, показанными на рисунке. Найти скорость груза. Верёвки нерастяжимы.

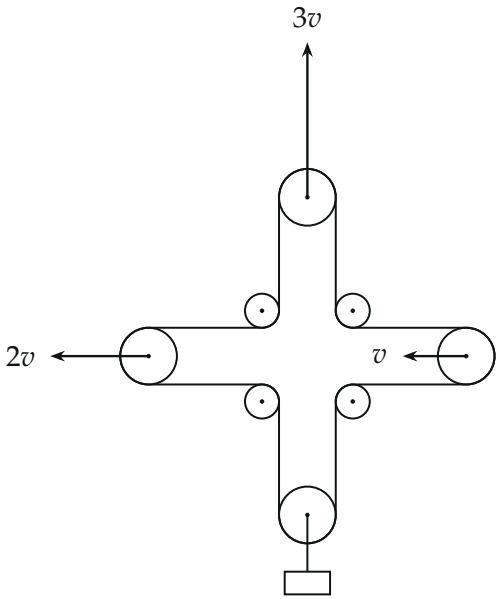
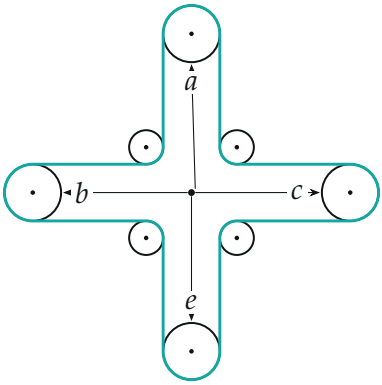


Рисунок условия: вид сверху, крупные блоки подвижные, маленькие неподвижные

▲ **Решение.** **Что происходит.** Верёвка здесь одна и замкнута в петлю вокруг всех восьми блоков, а нерастяжимая верёвка не меняет своей длины. Три подвижных блока смещаются и меняют длины прилегающих к ним участков петли: верхний и левый удаляются от центра и «забирают» верёвку, правый подъезжает к центру и «отдаёт» её. Четвёртый блок

вместе с грузом ничем, кроме верёвки, не удерживается, и ему остаётся подстроиться так, чтобы длина петли не изменилась. Главная идея — записать длину петли через положения блоков и приравнять её изменение нулю.

Обозначения. O — центр системы (середина между неподвижными блоками). a, b, c, e — расстояния от O до осей верхнего, левого, правого и нижнего (с грузом) подвижных блоков. Неподвижные блоки стоят по углам квадрата вокруг O и не двигаются.



Петля верёвки (бирюза) и расстояния a, b, c, e от центра O до осей подвижных блоков

1. Длина петли. Верёвка идёт по восьми прямым участкам, по два у каждого подвижного блока, и по дугам на блоках. Участки параллельны осям, поэтому длина пары у верхнего блока равна $2(a - \text{const})$: от оси блока до неподвижных блоков остаётся расстояние a минус постоянная величина (расстояние от центра до неподвижных блоков и радиусы блоков). То же для остальных пар. Дуги верёвки на блоках не меняются: каждый подвижный блок охвачен на половину окружности, каждый неподвижный — на четверть, радиусы постоянны. Значит,

$$L = 2a + 2b + 2c + 2e + \text{const}.$$

Верёвка нерастяжима, $L = \text{const}$, поэтому

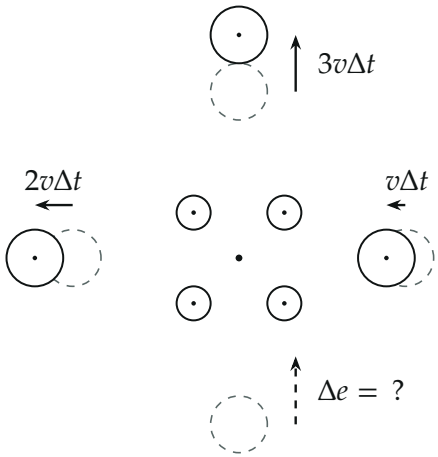
$$a + b + c + e = \text{const}.$$

Обратите внимание: в сумму входят расстояния до осей *всех четырёх* подвижных блоков, и каждое считается от центра. Блок, который движется к центру, уменьшает своё расстояние, поэтому его изменение входит со знаком «минус».

2. Смещения за малое время. За малое время Δt скорости блоков не успевают измениться. Верхний блок удаляется от центра со скоростью $3v$, левый — со скоростью $2v$, правый приближается к центру со скоростью v. Значит,

$$\Delta a = 3v\Delta t, \qquad \Delta b = 2v\Delta t, \qquad \Delta c = -v\Delta t.$$

Изменение Δe нижнего блока — то, что нужно найти.



Смещения за время Δt: пунктиром — прежнее положение блока, стрелки — сдвиг. Для нижнего блока сдвиг пока неизвестен

3. Условие постоянства длины. Приращение суммы $a + b + c + e$ равно нулю:

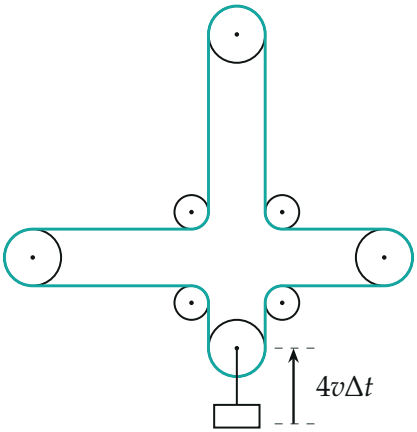
$$\Delta a + \Delta b + \Delta c + \Delta e = 0,$$
$$3v\Delta t + 2v\Delta t - v\Delta t + \Delta e = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta e = -4v\,\Delta t.$$

Знак «минус» означает, что нижний блок вместе с грузом приблизился к центру (на рисунке — поднялся вверх) на $4v\Delta t$.

4. Скорость груза. Груз привязан к оси нижнего блока и движется вместе с ним, поэтому

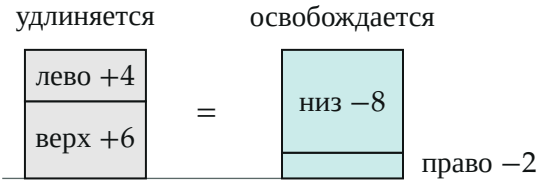
$$v_{\text{гр}} = \frac{|\Delta e|}{\Delta t} = 4v.$$

Тот же результат даёт и производная по времени от соотношения $a + b + c + e = \text{const}$: проекции скоростей блоков на направления «от центра» в сумме дают нуль, $3v + 2v - v - v_{\text{гр}} = 0$, откуда $v_{\text{гр}} = 4v$ и груз движется к центру.



Итог: нижний блок с грузом сместился к центру на $4v\Delta t$; бирюзовая петля теперь той же длины, что и раньше

Баланс верёвки. У каждого блока два участка, поэтому длина пары меняется на 2Δ:



Баланс в единицах $v\Delta t$: удлиняется $6 + 4 = 10$ (серое), освобождается $2 + 8 = 10$ (бирюзовое)

Проверка. Размерность: скорость груза имеет ту же размерность, что и v. Частные случаи: если левый и правый блоки тянут «наружу» с одной скоростью w, а верхний стоит, то $w+w+0+\dot{e}=0$ и груз подъезжает к центру со скоростью $2w$ — он отдаёт верёвку сразу обеим сторонам. Если все три блока стоят, груз тоже стоит. А если бы все четыре блока одновременно удалялись от центра, петлю пришлось бы растягивать, и такое движение невозможно для нерастяжимой верёвки.

Смысл. Нерастяжимая верёвка в петле работает как «бухгалтерия»: сколько прибавилось на одних участках, столько должно убавиться на других. Груз на нижнем блоке и есть та статья, из которой берётся недостающее.

Ответ. $v_{\text{гр}}=4v$; груз движется к центру системы (на рисунке — вверх).