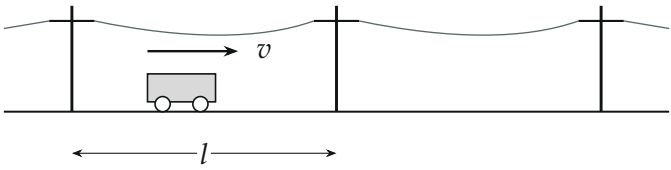
Автомобиль и столбы

Задача 5. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 7 класс, задача 5] Автомобиль через каждые $\Delta t = 4$ секунды проезжает мимо столба линии электропередачи. Если водитель увеличит скорость машины на некоторую величину Δv, автомобиль будет проезжать мимо столба каждые $\Delta t_1 = 3{,}5$ секунды. Какое время понадобится машине, чтобы проехать между двумя ближайшими столбами, если она увеличит скорость ещё на Δv?



Поясняющий рисунок: столбы стоят вдоль дороги на одинаковом расстоянии l друг от друга; машина едет со скоростью v

▲ **Решение.** **Что происходит.** Расстояние между соседними столбами одно и то же, его мы не знаем и обозначим l. Время между двумя столбами — это l, делённое на скорость, поэтому по каждому из двух времён из условия можно восстановить скорость, выраженную через l. Скорость увеличивали на одну и ту же величину Δv, и именно это связывает три скорости между собой. Главная идея — выразить скорости через l и времена, а неизвестное l в конце сократится.

Обозначения. l — расстояние между соседними столбами; v — начальная скорость автомобиля; t_2 — искомое время между столбами при скорости $v + 2\Delta v$. На каждом участке машина едет равномерно.

1. Три скорости через l. Равномерное движение между столбами: расстояние равно скорости, умноженной на время. Для трёх случаев

$$l = v\,\Delta t, \qquad l = (v + \Delta v)\,\Delta t_1, \qquad l = (v + 2\Delta v)\,t_2.$$

Отсюда скорости

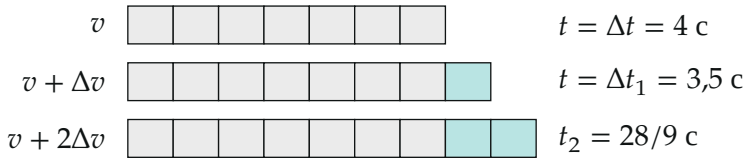
$$v = \frac{l}{\Delta t} = \frac{l}{4\text{ с}}, \qquad v + \Delta v = \frac{l}{\Delta t_1} = \frac{l}{3{,}5\text{ с}}, \qquad v + 2\Delta v = \frac{l}{t_2}.$$

2. Прибавка скорости. Вычтем первое равенство из второго:

$$\Delta v = \frac{l}{\Delta t_1} - \frac{l}{\Delta t} = l\Big(\frac{1}{3{,}5} - \frac{1}{4}\Big)\frac{1}{\text{с}} = \frac{l}{28} \cdot \frac{1}{\text{с}}.$$

Удобно измерять скорости в единицах $u = \dfrac{l}{28\ \text{с}}$ — одной прибавке Δv. Тогда

$$v = \frac{l}{4\ \text{с}} = 7u, \qquad v + \Delta v = \frac{l}{3{,}5\ \text{с}} = 8u, \qquad v + 2\Delta v = 9u.$$

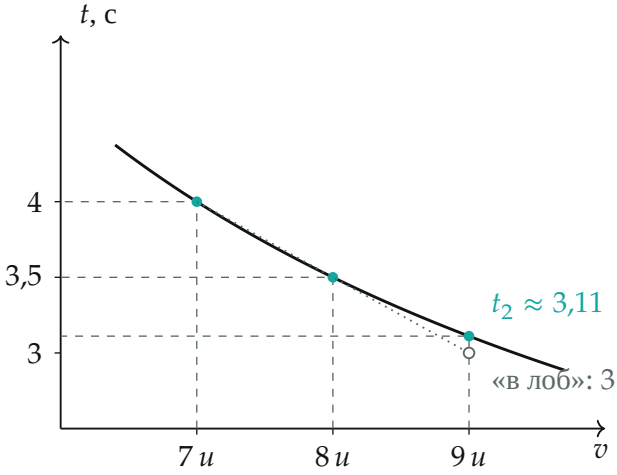


Скорости в клетках по $\Delta v = u = l/(28\ \text{с})$: 7, 8 и 9 клеток; бирюзовые клетки — добавленные прибавки Δv. Справа — время между столбами при каждой скорости

3. Третья скорость и время. После второго увеличения скорость равна $v + 2\Delta v = 9u = \dfrac{9l}{28\ \text{с}}$. Следовательно,

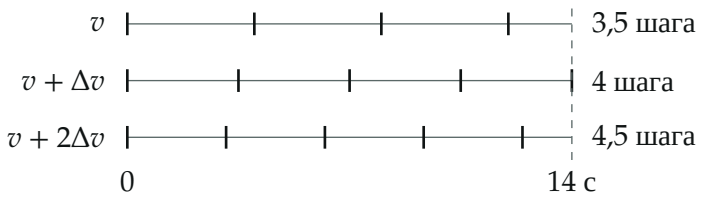
$$t_2 = \frac{l}{v + 2\Delta v} = \frac{28}{9}\ \text{с} \approx 3{,}1\ \text{с}.$$

Обратите внимание: l вошло в каждое равенство и сократилось — расстояние между столбами знать не нужно. Вторая ловушка: нельзя считать, что время уменьшится на ту же 0,5 с и станет 3 с. Время между столбами обратно пропорционально скорости, а не линейно с ней связано: при равных прибавках скорости оно убывает всё медленнее.



Время между столбами $t = l/v$ при скоростях $7u$, $8u$, $9u$ ($u = l/28$ с$^{-1}$). Пунктирная прямая через первые две точки привела бы к 3 с — настоящая кривая идёт выше: $t_2 \approx 3{,}11$ с

Второй способ: сколько столбов проедет машина. Число столбов, которые машина проезжает за одно и то же время, пропорционально скорости. Возьмём общее время 14 с (оно делится на 4 и на 3,5). Машина проедет мимо $14/4 = 3{,}5$ расстояний между столбами при скорости v и $14/3{,}5 = 4$ при скорости $v + \Delta v$. Скорости растут на равную прибавку, значит, и эти числа растут на равную прибавку: 3,5, 4, 4,5. Третья машина проедет 4,5 расстояний за 14 с, поэтому на одно расстояние ей нужно $t_2 = \dfrac{14}{4{,}5} = \dfrac{28}{9}$ с — как и выше.



Моменты, когда машина проезжает мимо столбов (чёрточки), за 14 с при трёх скоростях: чёрточек (расстояний между столбами) 3,5, 4 и 4,5 — арифметическая прогрессия, как и скорости

Проверка. Размерность: $\dfrac{l}{l/\text{с}}$ — секунды. Предельный случай: если бы $\Delta v \to 0$, то $\Delta t_1 \to \Delta t$ и $t_2 \to \Delta t$; по общей формуле $t_2 = \dfrac{\Delta t\,\Delta t_1}{2\Delta t - \Delta t_1}$ при $\Delta t_1 = \Delta t$ получаем $t_2 = \Delta t$. Оценка: скорость выросла, значит, $t_2 < 3{,}5$ с; а убывает время всё медленнее (иначе мы попали бы в ловушку «минус ещё 0,5 с»), значит, $t_2 > 3$ с. Наш ответ 3,11 с лежит в этом коридоре.

Смысл. Все три случая — один и тот же путь между столбами, и именно его неизменность позволяет сравнивать скорости, не зная l.

Ответ. $t_2 = \dfrac{\Delta t\,\Delta t_1}{2\Delta t - \Delta t_1} = \dfrac{28}{9}$ с $\approx 3{,}1$ с.