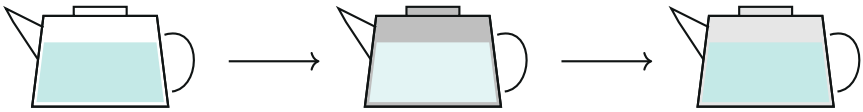
Чайник: повторное кипячение

Задача 4. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 8 класс, задача 4] «Чайник: повторное кипячение».

Если электрический чайник с водой комнатной температуры включить в электрическую сеть, вода в нём закипит через время t_1. Если из чайника вылить кипяток, налить такое же количество воды комнатной температуры, дождаться установления теплового равновесия, а потом включить в электрическую сеть, вода в нём закипит через время $\frac{3t_1}{4}$. Какая температура установилась в чайнике после наливания в него воды комнатной температуры, если комнатная температура $T_0 = 20\,^\circ\text{C}$? Считать, что теплопотери отсутствуют.



а) вода T_0, чайник T_0 б) вода T_0, чайник $T_к$ в) вода и чайник T_x

Поясняющий рисунок (в оригинале условия рисунка нет): состояния чайника. а) начало первого опыта; б) только что налили воду комнатной температуры в нагретый чайник; в) после выравнивания температур, перед вторым включением. $T_к = 100^\circ C$ — температура кипения

▲ **Решение.** **Что происходит.** Нагреватель отдаёт воде и чайнику теплоту, потерь нет, поэтому вся его энергия Pt идёт на нагрев. Теплоёмкости воды и чайника нам неизвестны, но по отдельности они и не нужны. Главная идея — сравнить два нагрева: в первом греется всё от T_0 до кипения, а во втором — только то, чего не хватает до состояния «всё закипело». Чайник уже набрал свои 100°C в кипятке, и эта энергия никуда не уходит, потому что потерь нет.

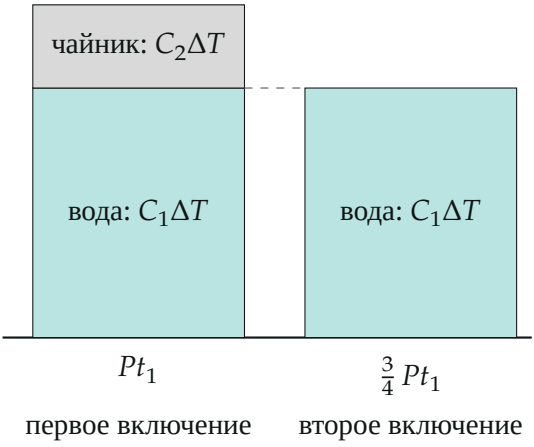
Обозначения. P — мощность нагревателя, C_1 и C_2 — теплоёмкости воды и чайника, $T_к = 100^\circ\text{C}$, T_x — искомая температура после выравнивания.

1. Первое включение. Греем воду вместе с чайником от T_0 до $T_к$. Вся энергия нагревателя идёт на нагрев:

$$Pt_1 = (C_1 + C_2)(T_к - T_0).$$

2. Второе включение: сколько тепла нужно. Кипяток вылили, и в чайнике осталась его энергия — чайник при $T_к$. Налили воду T_0 и дали температурам выровняться: этот обмен теплотой происходит *внутри* системы «вода + чайник», теплопотерь нет, поэтому полная внутренняя энергия при выравнивании не изменилась. Конечное состояние второго нагрева — всё при $T_к$. До него от состояния б) (чайник уже при $T_к$, вода при T_0) не хватает только энергии для нагрева воды от T_0 до $T_к$: чайнику греться не надо. Поэтому

$$P \cdot \frac{3}{4} t_1 = C_1(T_к - T_0).$$



Теплота, подведённая нагревателем ($\Delta T = T_к - T_0$, столбики в одном масштабе). В первом опыте греются вода и чайник, во втором — только вода; отношение столбиков равно $\frac{3}{4}$

3. Теплоёмкости. Разделим первое уравнение на второе — P, t_1 и ΔT

сократятся:

$$\frac{4}{3} = \frac{C_1 + C_2}{C_1} = 1 + \frac{C_2}{C_1} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 3C_2.$$

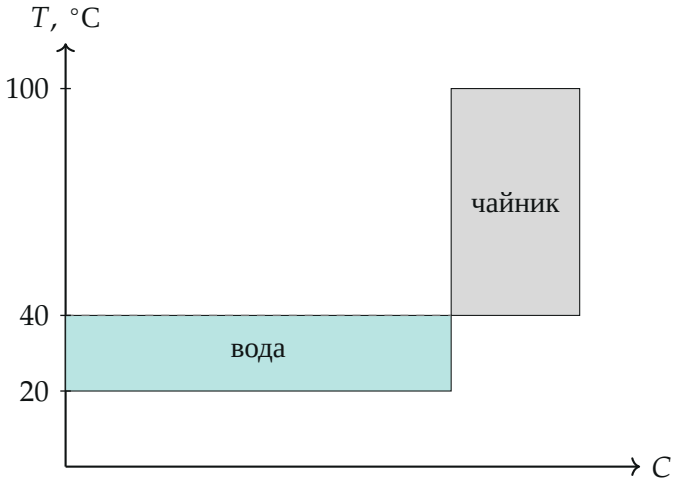
Теплоёмкость воды втрое больше теплоёмкости чайника.

4. Тепловой баланс при выравнивании температур. В состоянии б) вода (температура T_0) и чайник (температура $T_к$) обмениваются теплотой без потерь, пока температуры не станут равны T_x: сколько вода получила, столько чайник отдал,

$$C_1(T_x - T_0) = C_2(T_к - T_x).$$

Подставим $C_1 = 3C_2$ — C_2 сократится:

$$3(T_x - T_0) = T_к - T_x \quad \Rightarrow \quad T_x = \frac{3T_0 + T_к}{4} = \frac{3 \cdot 20 + 100}{4} = 40°\text{C}.$$

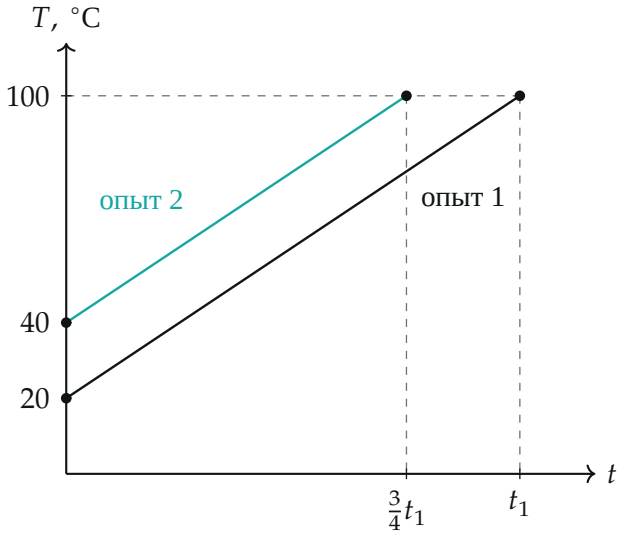


Баланс при выравнивании. Площадь прямоугольника — переданная теплота $C\Delta T$: вода нагрелась на $20°C$ при $C_1 = 3C_2$, чайник остыл на $60°C$ при C_2. Площади равны, общий уровень — $T_x = 40°C$

5. Второй способ: одна и та же скорость нагрева. После выравнивания в чайнике вода и чайник имеют общую температуру T_x, поэтому греть теперь нужно и воду, и чайник вместе — как в первом опыте, с той же полной теплоёмкостью $C_1 + C_2$ и той же мощностью P. Значит, температура растёт с той же скоростью, а время нагрева пропорционально разности температур:

$$\frac{3t_1/4}{t_1} = \frac{T_к - T_x}{T_к - T_0} \quad \Rightarrow \quad T_x = T_к - \frac{3}{4}(T_к - T_0) = 100 - \frac{3}{4}\cdot 80 = 40°\text{C}.$$

Теплоёмкости вообще не понадобились. Обе нагревательные кривые — параллельные прямые.



Температура от времени (время отсчитано от каждого включения; чёрная прямая — опыт 1, бирюзовая — опыт 2). Обе прямые параллельны: полная теплоёмкость и мощность одни и те же; второй нагрев начинается с $40°C$ *и до кипения занимает* $\frac{3}{4}t_1$

Обратите внимание: мысль «во втором случае греем только воду» не значит, что чайник остался холодным. Чайник отдал воде свою энергию при выравнивании и стал таким же тёплым (T_x); при втором включении

нужна энергия на нагрев *обоих* от T_x до $T_к$, и она равна энергии нагрева одной холодной воды от T_0 до $T_к$ — в точности по уравнению пункта 2.

Проверка. Размерность: T_x — температура. Выберем $C_2 = 1$, $C_1 = 3$ (условные единицы) и $P = 1$: первый нагрев $Pt_1 = (3 + 1) \cdot 80 = 320$; второй нагрев $\frac{3}{4} \cdot 320 = 240 = C_1 \cdot 80$ — сходится. Выравнивание: вода получила $3 \cdot (40 - 20) = 60$, чайник отдал $1 \cdot (100 - 40) = 60$. Предел: лёгкий чайник ($C_2 \to 0$) почти не меняет температуру воды: $T_x \to T_0$, а время второго нагрева $\to t_1$ — по формуле $\dfrac{t_2}{t_1} = \dfrac{C_1}{C_1 + C_2} \to 1$.

Физический смысл: температура после выравнивания — взвешенное среднее начальных температур с весами C_1 и C_2: вода втрое «тяжелее» чайника, поэтому T_x ближе к T_0.

Ответ. После наливания воды в чайнике установилась температура $T_x = 40°\text{C}$.