Сообщающиеся сосуды с поршнями

Задача 5. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 8 класс, задача 5] «Сообщающиеся сосуды с поршнями».

Два сообщающихся сосуда имеют форму цилиндров с площадью сечений S и $4S$. В сосуды налита жидкость, поверхности которой закрыты невесомыми поршнями. Если некоторый груз положить на поршень в левом сосуде, то этот поршень опустится на величину Δh (см. левый рисунок). На какую величину по сравнению с первоначальным положением опустится правый поршень, если груз снять с левого поршня и переложить на правый (см. правый рисунок)?

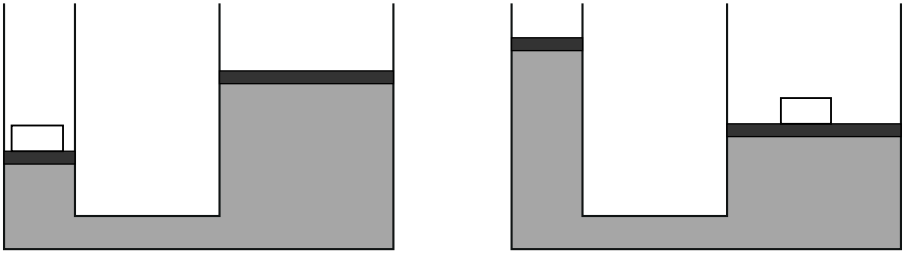


Рисунок условия: слева груз на поршне узкого (левого) сосуда, справа — на поршне широкого (правого)

▲ **Решение.** **Что происходит.** Поршни невесомы, поэтому без груза жидкость стоит на одном уровне в обоих сосудах. Груз давит на свой поршень; жидкость вытесняется в другой сосуд и поднимает там второй поршень. Равновесие наступает, когда жидкость под нагруженным поршнем держит груз, а перепад уровней создаёт нужное давление. Главная идея — два условия: объём жидкости не меняется (сколько ушло из одного колена, столько пришло в другое), и давление в жидкости на одной горизонтали одинаково (закон Паскаля, гидростатика).

Обозначения. m — масса груза, ρ — плотность жидкости, S и $4S$ — площади сечений левого и правого сосудов. Случай 1 — груз слева: левый поршень опустился на $h = \Delta h$, правый поднялся на x. Случай 2 — груз справа: правый поршень опустился на h_1 (его и ищем), левый поднялся на x_1. Атмосферное давление p_0 действует сверху на оба поршня и в уравнениях сократится.

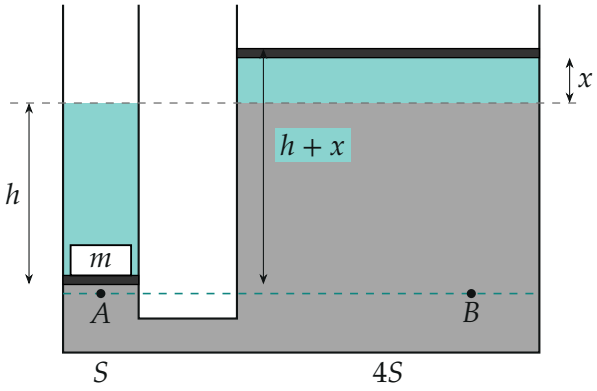
Случай 1: груз на левом поршне.

1. Сохранение объёма жидкости. Из левого сосуда ушёл объём hS, в правом прибавился объём $4S \cdot x$, жидкость несжимаема:

$$hS = 4S\,x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{h}{4}.$$

2. Равенство давлений на одной горизонтали. Возьмём горизонталь на уровне нижнего (левого) поршня и точки A (в левом сосуде под поршнем) и B (в правом, на этой же горизонтали). Тогда в точке A жидкость уравновешивает вес груза: давление там $p_A = p_0 + \dfrac{mg}{S}$ (невесомый поршень передаёт давление груза и атмосферы). В точке B давление создаёт столб жидкости высотой $h + x$ под правым поршнем: $p_B = p_0 + \rho g(h+x)$. Жидкость покоится, на одной горизонтали давления равны, $p_A = p_B$:

$$\frac{mg}{S} = \rho g\,(h + x).$$



Груз слева (в масштабе; ширина сосуда на рисунке пропорциональна площади сечения). Бирюзовые области — одинаковые по площади объёмы: ушедший из левого сосуда ($h \cdot S$) и пришедший в правый ($x \cdot 4S$). Штриховая бирюзовая линия — горизонталь AB, пунктир серым — начальный уровень

3. Подставляем x. Из первого пункта $h + x = \frac{5}{4}h$, поэтому

$$\frac{mg}{S} = \frac{5}{4}\rho g h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{4m}{5\rho S} = \Delta h.$$

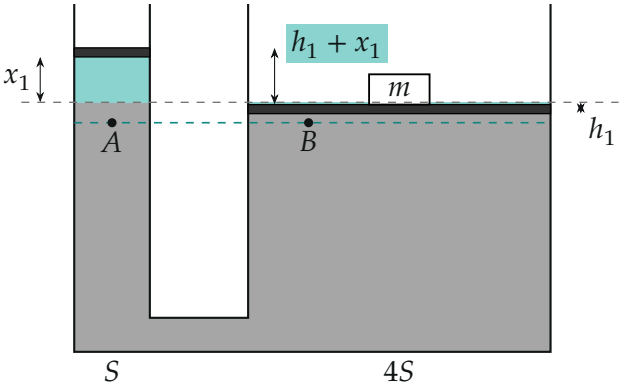
Случай 2: груз на правом поршне.

4. Те же два условия. Теперь нижний — правый поршень. Объём: из правого сосуда ушло $4S \cdot h_1$, в левом прибавилось $S\,x_1$:

$$4S\,h_1 = S\,x_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4h_1.$$

Равенство давлений на горизонтали нижнего (правого) поршня: слева в точке A — столб $h_1 + x_1$ под левым поршнем, справа в точке B — груз, распределённый на площадь $4S$:

$$\frac{mg}{4S} = \rho g\,(h_1 + x_1) = 5\rho g\,h_1.$$



Груз справа (тот же масштаб): перепад уровней $h_1 + x_1$ в четыре раза меньше, чем в первом случае, а правый поршень опустился всего на h_1

5. Выражаем h_1 и сравниваем.

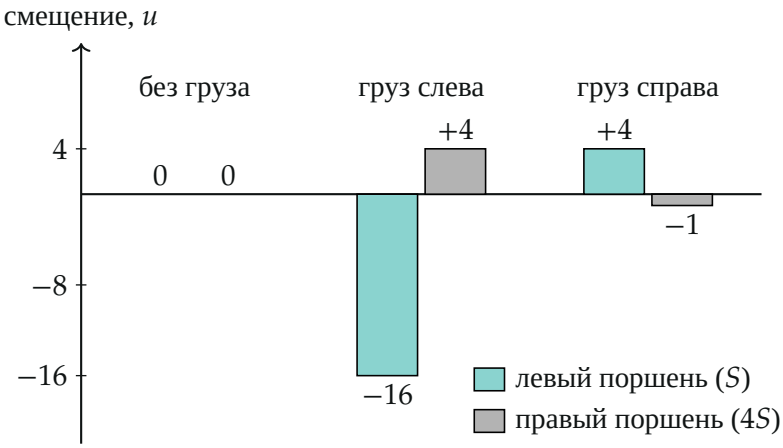
$$h_1 = \frac{m}{20\rho S}, \qquad \frac{h_1}{\Delta h} = \frac{m/(20\rho S)}{4m/(5\rho S)} = \frac{1}{16}.$$

Обратите внимание: ответ не равен “в четыре раза”, хотя груз на правом поршне давит на жидкость вчетверо слабее. Эта вчетверо меньшая разность уровней делится между поршнями ещё раз по-другому — узкий поршень проходит большую часть перепада, широкий — меньшую, — и множитель 4 набегает дважды.

Проверка вторым способом — через перепад уровней. Разность уровней D между поршнями определяется весом груза и площадью нагруженного поршня: $D_1 = \dfrac{m}{\rho S}$ (груз слева), $D_2 = \dfrac{m}{4\rho S}$ (груз справа). Из сохранения объёма опускание пропорционально обратной площади: поршень с площадью S проходит $\frac{4}{5}$ перепада, поршень с площадью $4S$ — $\frac{1}{5}$. Тогда

$$\Delta h = \tfrac{4}{5}D_1 = \frac{4m}{5\rho S}, \qquad h_1 = \tfrac{1}{5}D_2 = \frac{m}{20\rho S},$$

те же числа. В общем виде для площадей S_1 и S_2 получается $h_1/\Delta h = (S_1/S_2)^2$; при равных площадях — единица (поршни симметричны), при $S_2 = 4S_1$ — $\frac{1}{16}$.



Смещения поршней в трёх состояниях в единицах $u = \dfrac{m}{20\rho S}$ *(минус — вниз): в первом случае* -16 *и* $+4$*, во втором* $+4$ *и* -1*; правый поршень опускается на* 1 *против* 16 *— в* 16 *раз меньше*

Физический смысл: у широкого сосуда сечение вчетверо больше, и груз на его поршне создаёт вчетверо меньшее давление; кроме того, жидкость из широкого колена уходит “вширь” и опускает поршень ещё вчетверо слабее.

Ответ. $\Delta h_{\text{прав}} = \dfrac{\Delta h}{16}$.