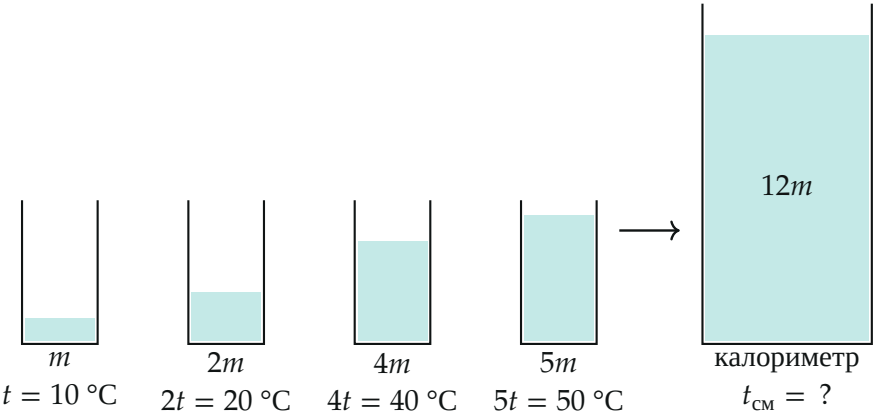
Смешивание четырёх порций воды

Задача 1. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 8 класс, задача 1] «Смешивание четырёх порций воды».

В калориметре смешивают 4 порции воды: первая массой m с температурой $t = 10\,^\circ\text{C}$, вторая массой $2m$ с температурой $2t$, третья массой $4m$ с температурой $4t$, четвёртая массой $5m$ с температурой $5t$. Найти температуру смеси. Теплообменом с окружающим пространством и теплоёмкостью калориметра пренебречь.



Поясняющий рисунок (в оригинале условия рисунка нет): четыре порции воды выливают в калориметр, высота слоя пропорциональна массе порции

▲ **Решение. Что происходит.** Внутри теплоизолированного калориметра порции обмениваются теплотой: более холодные нагреваются, более тёплые остывают, пока вся вода не придёт к одной температуре x. Энергия не приходит снаружи и не уходит, поэтому сколько теплоты отдали остывшие порции, столько получили нагревшиеся. Главная идея: уравнение теплового баланса — сумма теплот, полученных всеми порциями (со знаком), равна нулю. Это задача на смешивание: температура смеси — среднее температур порций с весами-массами, удельная теплоёмкость воды в нём сократится.

Обозначения. c — удельная теплоёмкость воды, m_i и t_i — масса и начальная температура i-й порции, x — температура смеси. Теплота, полу-

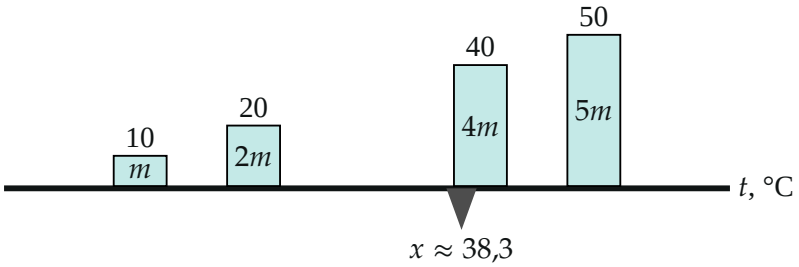
ченная i-й порцией, $Q_i = c\,m_i\,(x - t_i)$: она положительна, если порция нагрелась ($x > t_i$), и отрицательна, если остыла и отдала теплоту.

1. Уравнение теплового баланса. Калориметр изолирован, его теплоёмкостью пренебрегаем, работа не совершается; значит, суммарное изменение внутренней энергии воды равно нулю — закон сохранения энергии для системы из четырёх порций:

$$\sum_i c\,m_i\,(x - t_i) = 0.$$

Для наших порций:

$$c\,m\,(x - t) + c\cdot 2m\,(x - 2t) + c\cdot 4m\,(x - 4t) + c\cdot 5m\,(x - 5t) = 0.$$



Температура смеси — точка равновесия рычага: порции — грузы массами $m, 2m, 4m, 5m$, расставленные по шкале температур; опора стоит в точке x

2. Решаем. Сокращаем $c\,m$ (оно входит в каждое слагаемое):

$$(x - t) + 2(x - 2t) + 4(x - 4t) + 5(x - 5t) = 0,$$

$$12\,x = t\,(1 + 4 + 16 + 25) = 46\,t.$$

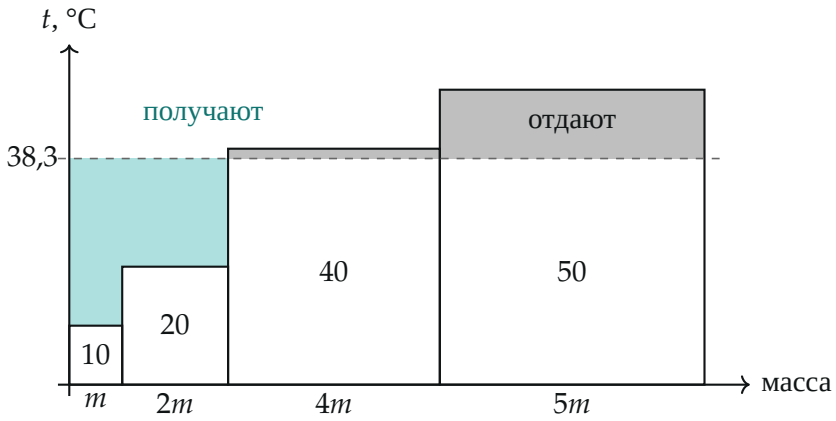
Неизвестная x выражена:

$$x = \frac{46}{12}\,t = \frac{23}{6}\,t.$$

3. Число. При $t = 10\,^\circ\text{C}$:

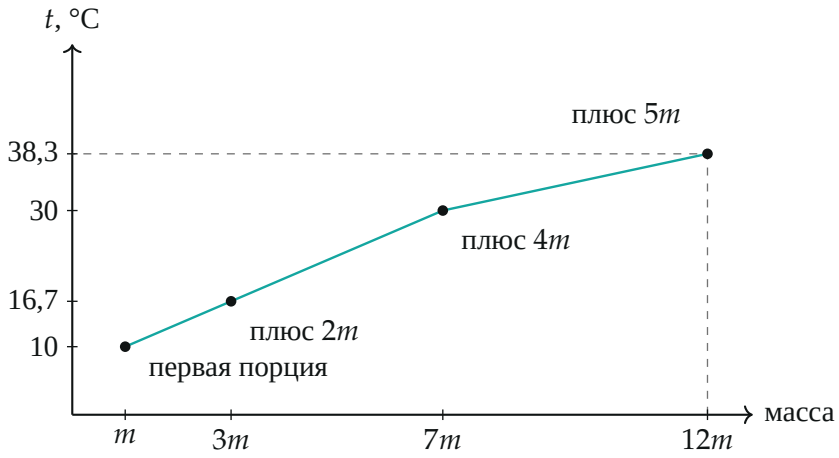
$$x = \frac{23}{6} \cdot 10\,^\circ\text{C} = \frac{230}{6}\,^\circ\text{C} \approx 38{,}3\,^\circ\text{C}.$$

Обратите внимание: слагаемые для порций теплее смеси (40 и 50 °C) отрицательны — они отдают теплоту. Среднее арифметическое температур $\frac{10+20+40+50}{4} = 30\,^\circ\text{C}$ дало бы неверный ответ: оно годилось бы только при равных массах порций, а здесь массы разные.



Столбик — порция: ширина — масса, высота — температура. Пунктир — температура смеси. Бирюзовая площадь (недостающая до смеси у холодных порций) равна серой (избыток у тёплых): $28{,}3 + 36{,}7 = 6{,}7 + 58{,}3 = 65$ *в единицах* $\text{см} \cdot 1\,^\circ\text{C}$

Проверка. Размерность: x — температура, t — температура, коэффициент безразмерный. Смесь лежит между наименьшей и наибольшей температурой порций: $10 < 38{,}3 < 50$. Второй способ — смешиваем по очереди (при условии, что смешивание можно делать в любом порядке): первые две порции дают $\frac{1\cdot 10+2\cdot 20}{3} \approx 16{,}7\,^\circ\text{C}$ (масса $3m$); с третьей — $\frac{3\cdot 16{,}7+4\cdot 40}{7} = 30\,^\circ\text{C}$ (масса $7m$); с четвёртой — $\frac{7\cdot 30+5\cdot 50}{12} = \frac{460}{12} \approx 38{,}3\,^\circ\text{C}$. Баланс теплот: получено $c\,m\,(28{,}3 + 36{,}7) = 65\,c\,m \cdot 1\,^\circ\text{C}$, отдано $c\,m\,(6{,}7 + 58{,}3) = 65\,c\,m \cdot 1\,^\circ\text{C}$.



Температура смеси после последовательного добавления порций (по горизонтали — накопленная масса): 10, 16,7, 30 и 38,3 °C. *Каждая следующая порция сдвигает температуру к своей, всё меньше*

Физический смысл: температура смеси — «центр масс» порций на шкале температур, поэтому она ближе к температурам тяжёлых порций ($4m$ при 40 °C и $5m$ при 50 °C).

Ответ. $t_{\text{см}} = \dfrac{23}{6}\,t = \dfrac{230}{6}\,^\circ\text{C} \approx 38{,}3\,^\circ\text{C}$.