Пружины k и 2k, скорость стыка

Задача 3. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 8 класс, задача 3] «Пружины k и $2k$, скорость стыка».

Две невесомые пружины с коэффициентами жёсткости k и $2k$ связаны друг с другом своими концами. Вторые концы пружин тянут в противоположные стороны со скоростью v (см. рисунок). Найти скорость точки соединения пружин.



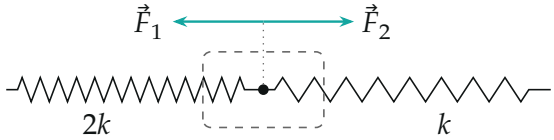
Рисунок условия: слева пружина жёсткости $2k$, справа — k; свободные концы тянут наружу со скоростью v

▲ **Решение. Что происходит.** Оба конца растягивают систему со скоростью v, а точка соединения никем не удерживается — она сама находит положение. Пружины невесомы, поэтому сила упругости в них в любой момент одинакова. Одинаковая сила при разной жёсткости даёт разное растяжение: мягкая пружина k растянута вдвое сильнее жёсткой $2k$. Главная идея: связать растяжения через закон Гука и через смещения концов — и точка соединения сдвинется в сторону жёсткой пружины.

Обозначения. Ось вдоль пружин, положительное направление выберем к жёсткой пружине $2k$ (на рисунке — влево). x — смещение точки соединения за время t от начала растяжения, $u = x/t$ — её скорость; Δ_1 и Δ_2 — растяжения пружин k и $2k$ за это время. Считаем, что в момент $t = 0$ пружины не растянуты (при растянутых результат тот же — см. замечание в конце).

1. Силы упругости в пружинах равны. Мысленно выделим кусочек пружин, в котором лежит точка соединения. Его масса равна нулю, поэтому по второму закону Ньютона сумма сил на него равна нулю в любой момент: сила со стороны пружины k уравновешивает силу со стороны пружины $2k$. Значит модули сил упругости одинаковы:

$$F_1 = F_2 = F.$$



Силы, действующие на невесомую точку соединения (в произвольный момент): равны по модулю и противоположны. Пунктиром отмечен выделенный кусочек без массы: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$

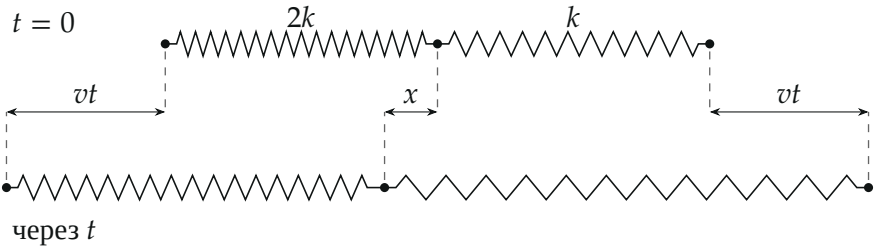
2. Закон Гука для каждой пружины. Сила упругости пропорциональна растяжению: $F = k\Delta_1$ для пружины k и $F = 2k\Delta_2$ для пружины $2k$. Приравниваем силы:

$$k\Delta_1 = 2k\Delta_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta_1 = 2\Delta_2.$$

Мягкая пружина растянута вдвое больше. Стоя на месте, соединение дало бы одинаковые растяжения (vt); чтобы у жёсткой оно стало меньше, соединение смещается в её сторону.

3. Растяжения через смещения. Свободные концы за время t ушли на vt наружу, точка соединения — на x к жёсткой пружине. Пружина k: правый конец ушёл вправо, соединение влево — растяжение $vt + x$. Пружина $2k$: левый конец ушёл влево на vt, соединение влево на x — растяжение $vt - x$:

$$\Delta_1 = vt + x, \qquad \Delta_2 = vt - x.$$



Два момента (в масштабе при $x = \frac{1}{3}vt$*): сверху пружины не растянуты, снизу — через время* t*. Концы сместились на* vt*, точка соединения — на* x *влево*

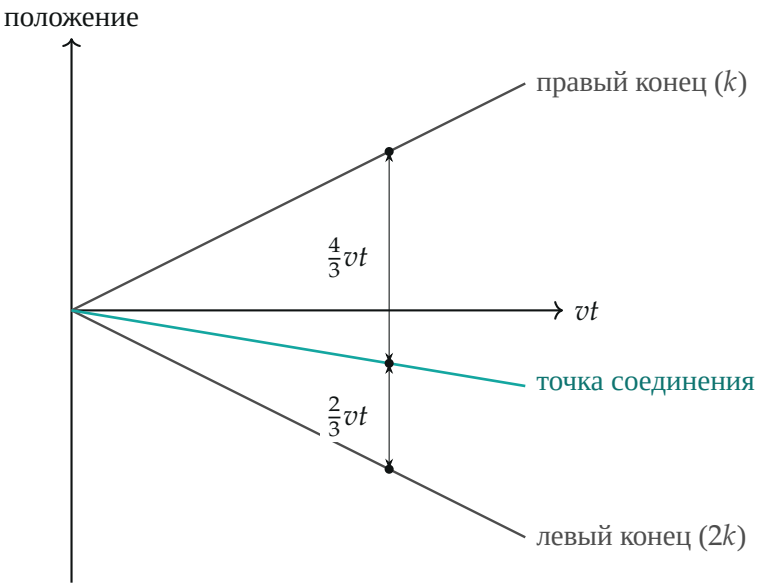
4. Находим смещение. Подставим растяжения в $\Delta_1 = 2\Delta_2$:

$$vt + x = 2\,(vt - x) \quad \Rightarrow \quad 3x = vt \quad \Rightarrow \quad x = \frac{vt}{3}.$$

Скорость точки соединения — смещение за время:

$$u = \frac{x}{t} = \frac{v}{3},$$

направлена она к жёсткой пружине $2k$ (на рисунке условия — влево).

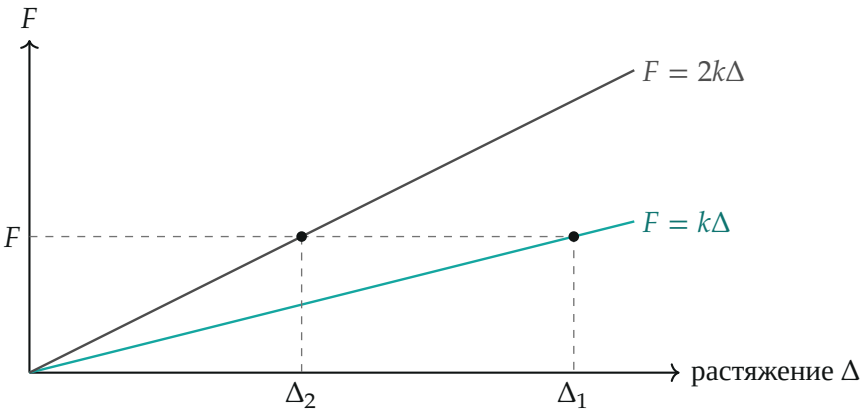


Положения концов и точки соединения (вверх — вправо). Расстояния между ними и есть растяжения: $\frac{2}{3}vt$ у пружины $2k$ и $\frac{4}{3}vt$ у пружины k — одна к двум, а силы $2k \cdot \frac{2}{3}vt = k \cdot \frac{4}{3}vt$ равны

Обратите внимание: ответ не нулевой, хотя концы тянут с равными скоростями в противоположные стороны. Симметрии нет — жёсткости разные, и неподвижной точка соединения быть не может: при неподвижном соединении растяжения были бы равны, а силы в пружинах — нет.

Проверка. Общая формула для пружин k_1 и k_2 получается так же: $k_1(vt + x) = k_2(vt - x)$, откуда $u = v\,\dfrac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2}$ в сторону более жёсткой.

Предельные случаи: при $k_1 = k_2$ получаем $u = 0$ (симметрия: стык стоит); при $k_2 \to \infty$ (жёсткая пружина почти не растягивается) $u \to v$ — стык едет вместе со своим концом; при $k_1 = k$, $k_2 = 2k$ — $\frac{1}{3}v$. Второй способ — через последовательное соединение: жёсткость двух пружин подряд $k_{\text{посл}} = \dfrac{k \cdot 2k}{k + 2k} = \dfrac{2}{3}k$, общее растяжение $2vt$, сила $F = \dfrac{2}{3}k \cdot 2vt = \dfrac{4}{3}kvt$; растяжение пружины $2k$ равно $F/(2k) = \frac{2}{3}vt$, значит стык сместился на $vt - \frac{2}{3}vt = \frac{1}{3}vt$.



Закон Гука для двух пружин: при одной и той же силе F растяжение пружины k вдвое больше, чем пружины $2k$: $\Delta_1 = 2\Delta_2$

Физический смысл: точка соединения сдвинулась на треть пути конца за счёт разницы жёсткостей — мягкая пружина «забирает» две трети общего растяжения $2vt$, жёсткая — одну треть.

Замечание. Если в начальный момент пружины уже растянуты, то силы в них всё равно одинаковы и $\Delta_1 = 2\Delta_2$ в каждый момент; значит и скорости роста растяжений находятся в том же отношении, $v + u = 2(v - u)$, и $u = \frac{v}{3}$ — ответ не меняется.

Ответ. $u = \dfrac{v}{3}$, направлена к более жёсткой пружине (с жёсткостью $2k$).