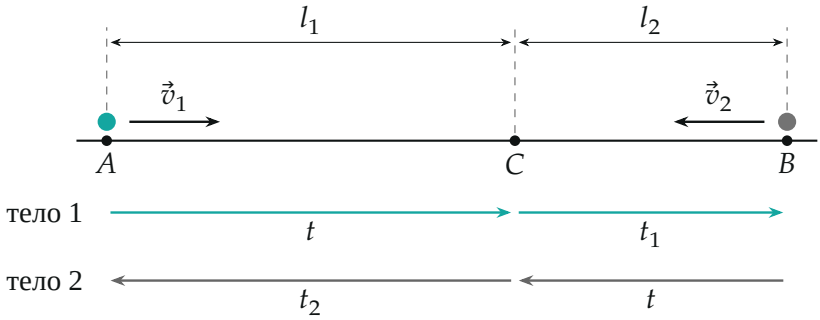
Тела навстречу, время встречи

Задача 5. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 8 класс, задача 5] «Тела навстречу, время встречи».

Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу начинают двигаться два тела. Через некоторое время они встречаются и, не останавливаясь, продолжают двигаться в тех же направлениях. Первое достигает конечного пункта через время t_1 после встречи, второе — через время t_2. Через какое время после начала движения тела встретились?



Поясняющий рисунок (в оригинале условия рисунка нет): тела выходят из A и B, встречаются в точке C и идут дальше. Верхние размеры — пути до встречи, нижние стрелки — время движения: тело 1 идёт $A \to C$ за t и $C \to B$ за t_1, тело 2 идёт $B \to C$ за t и $C \to A$ за t_2. Длины отрезков взяты для примера со скоростями 3 и 2

▲ **Решение. Что происходит.** Оба тела движутся равномерно. До встречи каждое проходит свой кусок отрезка AB за одно и то же время t: первое — AC, второе — BC. После встречи они «меняются» этими кусками: первому остаётся пройти CB — участок, который до встречи прошло второе, а второму — CA, участок первого. Главная идея: каждый из двух участков проходится двумя телами с разными скоростями, поэтому скорости можно исключить, а время t выразить только через t_1 и t_2.

Обозначения. v_1 и v_2 — скорости тел, $l_1 = AC$ и $l_2 = BC$ — пути, пройденные первым и вторым телами до встречи, t — время до встречи. Скорости постоянны.

1. До встречи. Равномерное движение, путь равен скорости на время:

$$l_1 = v_1 t, \qquad l_2 = v_2 t.$$

2. После встречи. Первому телу остаётся пройти участок CB длиной l_2 — за время t_1, второму — участок CA длиной l_1 за время t_2:

$$l_2 = v_1 t_1, \qquad l_1 = v_2 t_2.$$

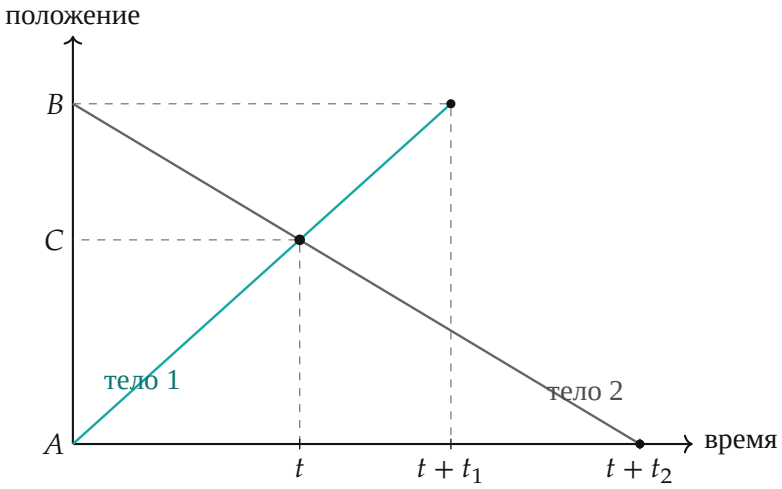


График положения тел (для примера $t_1 = 4$, $t_2 = 9$, скорости 3 и 2, $t = 6$): первое идёт из A к B, второе — из B к A. Точка пересечения — встреча; первое тело достигает B в момент $t + t_1$, второе — A в момент $t + t_2$

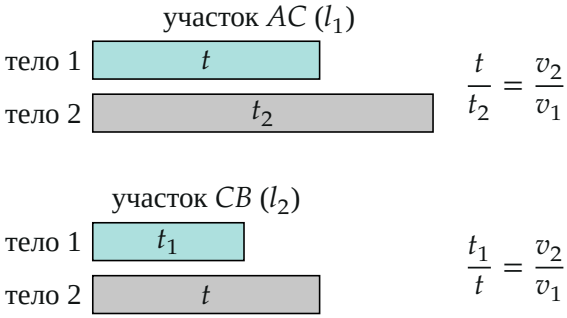
3. Исключаем скорости. Сравним два выражения для каждого из участков. Для l_1: $v_1 t = v_2 t_2$, для l_2: $v_2 t = v_1 t_1$. Это отношения скоростей:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t}, \qquad \frac{v_1}{v_2} = \frac{t}{t_1}.$$

Левые части одинаковы, значит равны правые: $\dfrac{t_2}{t} = \dfrac{t}{t_1}$. Отсюда

$$t^2 = t_1 t_2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{t_1 t_2}.$$

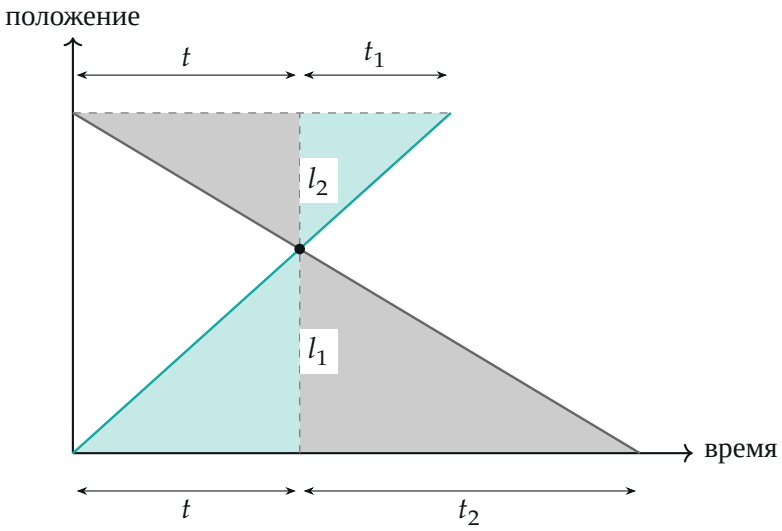
То же получается и перемножением четырёх равенств из пунктов 1 и 2: $l_1 l_2 = v_1 v_2 t^2 = v_1 v_2 t_1 t_2$, и $v_1 v_2$ сокращается.



Время на одном и том же участке обратно пропорционально скорости: на AC тело 1 тратит t, а тело 2 — t_2; на CB тело 1 — t_1, а тело 2 — t. Отношение времён в обеих парах одно и то же (v_2/v_1) — отсюда $t^2 = t_1 t_2$. Для примера $t_1 = 4$, $t_2 = 9$, $t = 6$

Обратите внимание: ответ не зависит ни от скоростей тел, ни от расстояния между пунктами — только от t_1 и t_2, и притом симметрично: t — среднее геометрическое. Расстояние и скорости для ответа не нужны.

Проверка вторым способом — числом. Возьмём $v_1 = 3$, $v_2 = 2$ (в одних и тех же единицах) и $AB = 30$. Тела сближаются со скоростью $v_1 + v_2 = 5$, встреча через $t = \frac{30}{5} = 6$. До встречи первое прошло $l_1 = 18$, второе — $l_2 = 12$. После встречи первому осталось $l_2 = 12$ со скоростью 3: $t_1 = 4$; второму — $l_1 = 18$ со скоростью 2: $t_2 = 9$. Формула: $\sqrt{t_1 t_2} = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$ — совпало. Предельный случай: при $v_1 = v_2$ тела встречаются посередине, и после встречи каждому остаётся то же время, что и до неё, $t_1 = t_2 = t$ — формула даёт $\sqrt{t^2} = t$.



Четыре прямоугольных треугольника на графике: катеты — время и путь. Бирюзовые (тело 1): катеты l_1 и t, l_2 и t_1; серые (тело 2): l_1 и t_2, l_2 и t. Одинаковые по цвету треугольники имеют один и тот же наклон — скорость; отсюда $v_1 = l_1/t = l_2/t_1$, $v_2 = l_2/t = l_1/t_2$

Физический смысл: t — среднее геометрическое t_1 и t_2, поэтому оно лежит между ними. Быстрое тело (пусть это тело 1) до встречи успевает пройти больший участок, после встречи ему остаётся меньший, и оно долетает раньше: $t_1 < t < t_2$ — в примере $4 < 6 < 9$.

Ответ. $t = \sqrt{t_1 t_2}$.