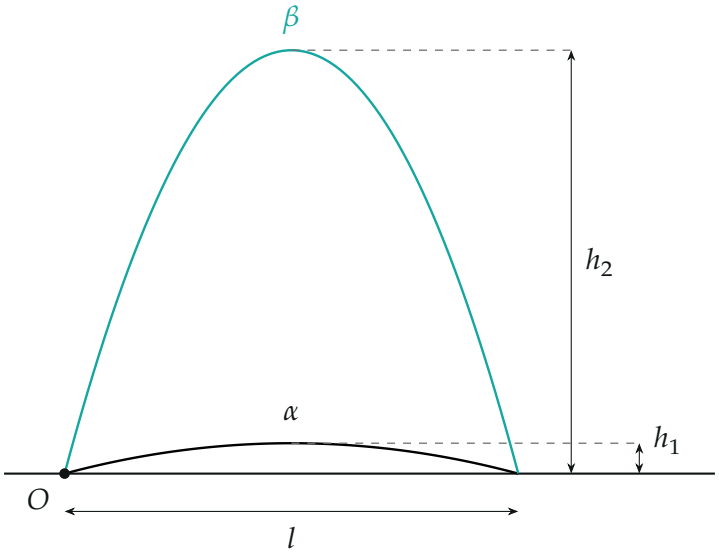
Бросок под двумя углами

Задача 3. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 9 класс, задача 3] «Бросок под двумя углами».

Тело дважды бросили с поверхности земли с одинаковой по величине начальной скоростью, но под разными углами к горизонту. Дальность полёта тела в этих двух случаях оказалась одинаковой и равной сумме максимальных высот подъёма тела в этих двух случаях. Под какими углами к горизонту бросали тело?



Поясняющий рисунок (в оригинале условия рисунка нет): два броска с одной скоростью v_0 под углами α (чёрная траектория) и β (бирюзовая) приводят в одну точку на расстоянии l; h_1 и h_2 — максимальные высоты. Условие задачи: $l = h_1 + h_2$

▲ **Решение.** **Что происходит.** Дальность и высота броска выражаются через угол по известным формулам. Первое условие (дальности равны) связывает два угла: они дополняют друг друга до 90°. А тогда сумма высот вообще не зависит от угла: $\sin^2\beta = \cos^2\alpha$, и $h_1 + h_2 = \dfrac{v_0^2}{2g}$. Второе условие превращается в уравнение с одним неизвестным углом.

Обозначения. v_0 — начальная скорость; α, β — углы двух бросков, $\alpha \neq \beta$; l — дальность (она у двух бросков одна); h_1, h_2 — максимальные высоты; g — ускорение свободного падения. Сопротивление воздуха не учитываем.

1. Формулы дальности и высоты. Разложим скорость: горизонтальная составляющая $v_0 \cos\alpha$ не меняется, вертикальная $v_0 \sin\alpha$ уменьшается под действием силы тяжести. Высшей точки тело достигает за время $t = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$, высота подъёма и полное время полёта $2t$:

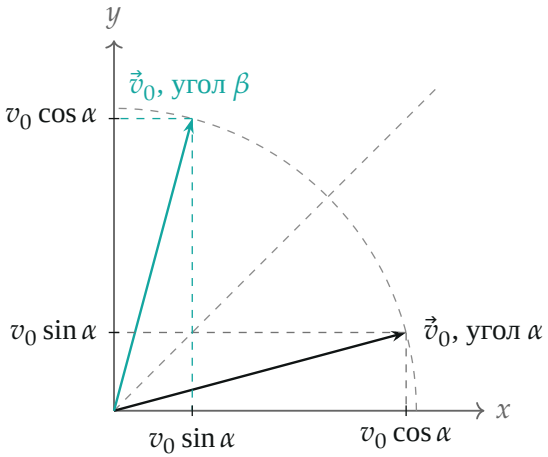
$$h = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g},$$

$$l = v_0 \cos\alpha \cdot 2t = \frac{v_0^2 \cdot 2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

2. Равные дальности. Для двух бросков $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$. Углы 2α и 2β лежат между $0°$ и $180°$ и различны, а синусы двух разных таких углов равны только тогда, когда эти углы дают в сумме $180°$:

$$2\alpha + 2\beta = 180° \quad \Rightarrow \quad \beta = 90° - \alpha.$$

Наглядно: проекции скорости при углах α и β просто меняются местами, а дальность $l = \dfrac{2v_x v_y}{g}$ зависит от их произведения, которое не меняется.



Проекции скорости для $\alpha = 15°$ (чёрный вектор) и $\beta = 75°$ (бирюзовый) — зеркальное отражение друг друга относительно пунктирной диагонали. Длина вектора v_0 одна и та же (пунктирная дуга)

3. Сумма высот. Теперь $\sin\beta = \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, поэтому

$$h_1 + h_2 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} + \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Неизвестным остался один угол α.

4. Условие $l = h_1 + h_2$. Подставим формулы дальности и суммы высот:

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad \sin 2\alpha = \frac{1}{2}.$$

Для 2α в промежутке от $0°$ до $180°$ получаем $2\alpha = 30°$ или $2\alpha = 150°$, то есть $\alpha = 15°$ или $\alpha = 75°$. Вторым углом будет $\beta = 90° - \alpha$, то есть те же два значения в другом порядке.

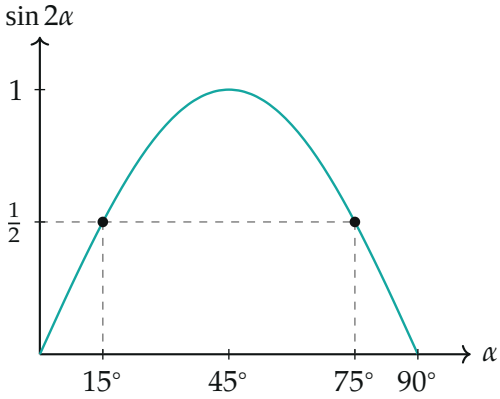
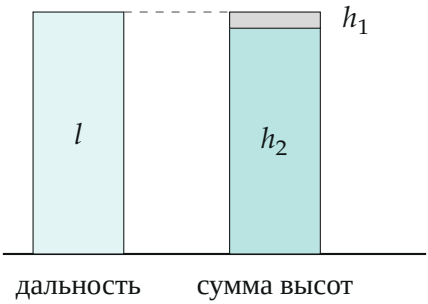


График $\sin 2\alpha$*: уровень* $\frac{1}{2}$ *пересекается дважды — при* $\alpha = 15°$ *и* $\alpha = 75°$*. Наибольшая дальность — при* $45°$ *(там* $\sin 2\alpha = 1$*)*

Обратите внимание: случай $\alpha = \beta = 45°$ не подходит. Условие требует *разных* углов, и к тому же при $45°$ дальность наибольшая: $l = v_0^2/g$, то есть вдвое больше суммы высот $v_0^2/(2g)$. Нам нужна дальность, равная ровно половине наибольшей: $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$.

Проверка. Размерность: v_0^2/g — метры. Числа в единицах v_0^2/g для $15°$ и $75°$: $l = \sin 30° = 0{,}5$; $h_1 = \frac{1}{2}\sin^2 15° \approx 0{,}034$, $h_2 = \frac{1}{2}\sin^2 75° \approx 0{,}466$, сумма $0{,}500$ — как раз l. Для пробного угла $30°$ (и $60°$): $l = \sin 60° \approx 0{,}87 \neq 0{,}5$, условие не выполняется.



Столбики в одном масштабе (высота l *равна* $0{,}5\,v_0^2/g$*): дальность* l *равна сумме высот* $h_1 + h_2$*. Высота* h_1 *мала — у низкого броска*

Физический смысл: у двух бросков с дополнительными углами и общей скоростью сумма высот всегда равна $\dfrac{v_0^2}{2g}$ — высоте вертикального броска с той же скоростью. Условие задачи требует, чтобы дальность оказалась ровно половиной наибольшей.

Ответ. Тело бросали под углами 15° и 75° к горизонту.