Средняя скорость по графику

Задача 2. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 9 класс, задача 2] «Средняя скорость по графику».

Дан график зависимости скорости тела от времени. Найти среднюю скорость тела за всё время движения. Среднюю скорость за первую половину полного времени движения. Величина v_0 предполагается известной.

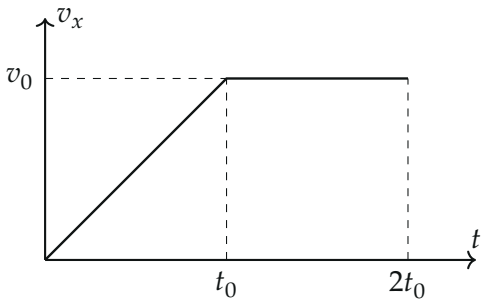


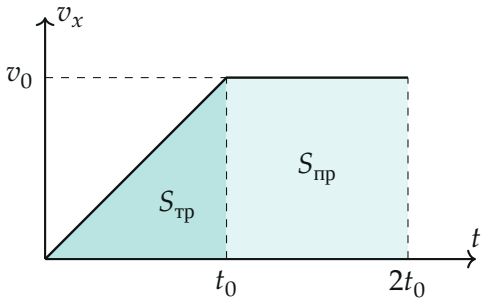
Рисунок условия: скорость растёт от нуля до v_0 за время t_0, затем остаётся постоянной до момента $2t_0$

▲ **Решение. Что происходит.** Средняя скорость — весь пройденный путь, делённый на всё время. Путь при движении вдоль оси без разворота равен площади под графиком $v_x(t)$, поэтому задача свелась к двум площадям: за время $2t_0$ и за время t_0.

Обозначения. S — путь за всё время $2t_0$; S_1 — путь за первую половину времени, то есть за t_0; $\langle v\rangle$ и $\langle v\rangle_1$ — средние скорости за эти промежутки.

1. Почему путь — площадь. Рассмотрим малый промежуток времени dt: скорость на нём почти постоянна, путь $dS = v_x\,dt$ равен площади узкой полоски под графиком. Сложим пути всех полосок от начала до нужного момента — получим площадь фигуры под графиком.

2. Путь за всё время. Фигура под графиком состоит из треугольника (разгон, $0 \dots t_0$) и прямоугольника (равномерное движение, $t_0 \dots 2t_0$).



Путь — площадь: треугольник $S_{тр}$ (разгон) и прямоугольник $S_{пр}$ (равномерное движение)

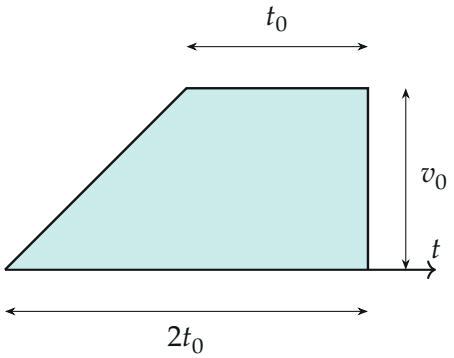
Площадь треугольника $S_{\text{тр}} = \frac{1}{2} v_0 t_0$, прямоугольника $S_{\text{пр}} = v_0 \cdot t_0$. Весь путь

$$S = S_{\text{тр}} + S_{\text{пр}} = \frac{1}{2} v_0 t_0 + v_0 t_0 = \frac{3}{2} v_0 t_0.$$

Второй способ — фигура целиком есть трапеция с основаниями $2t_0$ (по оси времени) и t_0 (верхняя горизонтальная часть) и высотой v_0:

$$S = \frac{2t_0 + t_0}{2} v_0 = \frac{3}{2} v_0 t_0,$$

тот же результат.

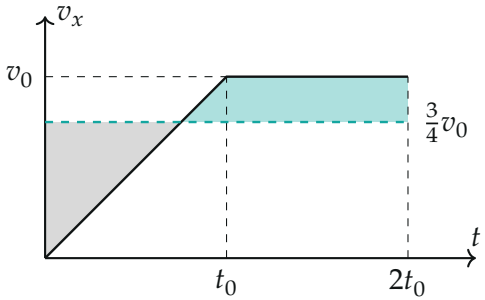


Та же фигура как трапеция: основания $2t_0$ и t_0, высота v_0

3. Средняя скорость за всё время. По определению

$$\langle v\rangle = \frac{S}{2t_0} = \frac{\frac{3}{2}v_0 t_0}{2t_0} = \frac{3}{4}v_0.$$

Наглядно: прямоугольник высотой $\frac{3}{4}v_0$ и длиной $2t_0$ имеет ту же площадь, что фигура под графиком. Площадь, которой на графике «не хватает» до этого прямоугольника в начале, равна избытку в конце.



Серая площадь (недобор до прямоугольника) равна бирюзовой (избыток): прямоугольник $2t_0 \times \frac{3}{4}v_0$ имеет ту же площадь, что фигура под графиком

4. Средняя скорость за первую половину времени. Первая половина полного времени — промежуток от 0 до t_0, на нём график — наклонная прямая, фигура — треугольник:

$$S_1 = \frac{1}{2}v_0 t_0, \qquad \langle v\rangle_1 = \frac{S_1}{t_0} = \frac{1}{2}v_0.$$

Для линейного роста скорости это то же самое, что среднее арифметическое начальной (0) и конечной (v_0) скоростей.

Обратите внимание: за первую половину *времени* тело проходит не половину пути, а лишь $\frac{S_1}{S} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$ его: сначала тело движется медленно.

Проверка. Размерность: $\frac{v_0 t_0}{t_0}$ — скорость. Вторая половина времени — равномерное движение со скоростью v_0; средняя за всё время равна

среднему арифметическому средних скоростей двух равных по времени половин:

$$\frac{\frac{1}{2}v_0 + v_0}{2} = \frac{3}{4}\,v_0,$$

как и получили. Для контроля построим график пути $s(t)$: средняя скорость — наклон прямой, соединяющей начало с точкой графика.

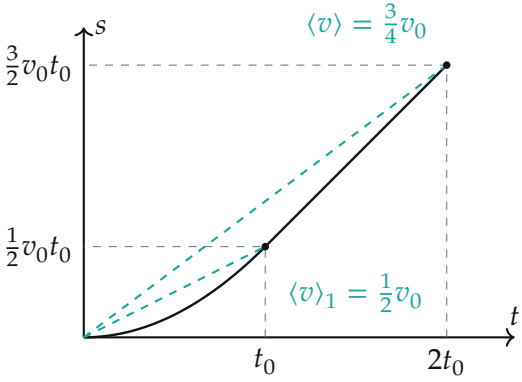


График пути: парабола на разгоне, затем прямая. Наклон бирюзовых секущих — средние скорости за время t_0 (внизу) и за $2t_0$ (вверху)

Ответ. За всё время движения $\langle v\rangle = \dfrac{3}{4}\,v_0$; за первую половину времени $\langle v\rangle_1 = \dfrac{1}{2}\,v_0$.