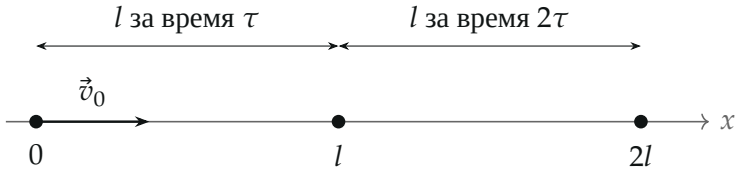
Два участка равноускоренного движения

Задача 4. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 9 класс, задача 4] «Два участка равноускоренного движения».

Тело, движущееся прямолинейно и равноускоренно, проходит с момента начала движения два последовательных участка длиной l за интервалы времени τ и 2τ. Найти начальную скорость и ускорение тела.



Поясняющий рисунок (в оригинале условия рисунка нет, а длина участка и время в тексте оригинала не напечатаны; по решению организаторов время до первой отметки τ, до второй 3τ, то есть второй участок занимает 2τ). Тело стартует в точке 0 со скоростью $\vec{v}_0$

▲ **Решение. Что происходит.** Тело движется равноускоренно вдоль прямой, поэтому его координата задаётся одной формулой с двумя неизвестными — начальной скоростью и ускорением. Условие даёт два «события»: в момент τ тело в точке l, в момент 3τ (первый участок τ плюс второй 2τ) — в точке $2l$. Два уравнения — две неизвестные, остаётся их решить. Второй участок той же длины тело проходит вдвое дольше первого, то есть оно замедляется: ускорение направлено против начальной скорости.

Обозначения. Ось x направим вдоль начальной скорости, начало — в точке старта, $t = 0$ — момент начала движения. $v_0 > 0$ — начальная скорость, a_x — проекция ускорения на ось (со знаком: направление заранее не известно).

1. Закон движения. При постоянном ускорении

$$x(t) = v_0 t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

2. Две точки. Первая отметка $x = l$ достигнута в момент $t = \tau$, вторая $x = 2l$ — в момент $t = 3\tau$:

$$l = v_0\tau + \frac{a_x\tau^2}{2}, \qquad 2l = 3v_0\tau + \frac{9a_x\tau^2}{2}.$$

Обратите внимание: во второе уравнение входит время 3τ, а не 2τ. Время 2τ — только длительность второго участка; координата же отсчитывается от начала движения.

3. Ускорение. Неизвестных две. Умножим первое уравнение на 3, чтобы v_0 в обоих уравнениях стояло с одним коэффициентом, и вычтем из второго:

$$3l = 3v_0\tau + \frac{3a_x\tau^2}{2},$$

$$2l - 3l = \left(\frac{9}{2} - \frac{3}{2}\right)a_x\tau^2 = 3a_x\tau^2 \quad \Rightarrow \quad a_x = -\frac{l}{3\tau^2}.$$

Знак минус: проекция ускорения отрицательна, то есть ускорение направлено против начальной скорости — тело тормозит, как мы и ожидали.

4. Начальная скорость. Подставим a_x в первое уравнение:

$$v_0\tau = l - \frac{a_x\tau^2}{2} = l + \frac{l}{6} = \frac{7l}{6} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{7l}{6\tau}.$$

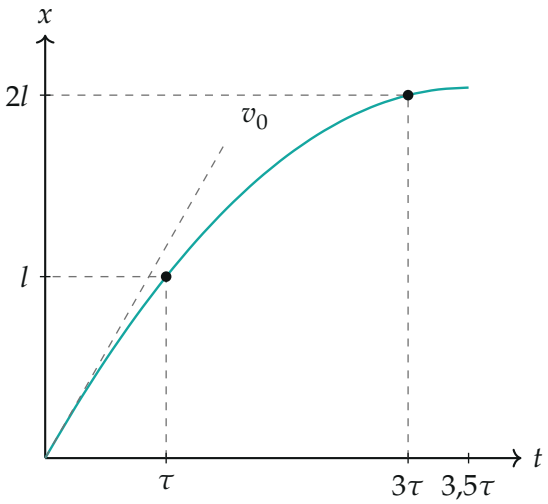


График $x(t)$: парабола с ветвями вниз проходит через $(\tau,\, l)$ и $(3\tau,\, 2l)$. Пунктирная прямая — касательная в начале, её наклон (отношение x к t вдоль неё) равен v_0. В момент $3{,}5\tau$ тело останавливается ($x \approx 2{,}04\,l$)

5. Второй способ: средние скорости. При равноускоренном движении скорость линейна по времени, поэтому средняя скорость на промежутке равна мгновенной в его середине. На первом участке $\bar{v}_1 = \dfrac{l}{\tau}$ — это скорость в момент $\dfrac{\tau}{2}$; на втором $\bar{v}_2 = \dfrac{l}{2\tau}$ — скорость в момент 2τ (середина промежутка от τ до 3τ). Ускорение — изменение скорости за время между этими моментами:

$$a_x = \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{2\tau - \tau/2} = \frac{\dfrac{l}{2\tau} - \dfrac{l}{\tau}}{\dfrac{3\tau}{2}} = -\frac{l}{3\tau^2}, \qquad v_0 = \bar{v}_1 - a_x\frac{\tau}{2} = \frac{l}{\tau} + \frac{l}{6\tau} = \frac{7l}{6\tau}.$$

Ответ тот же.

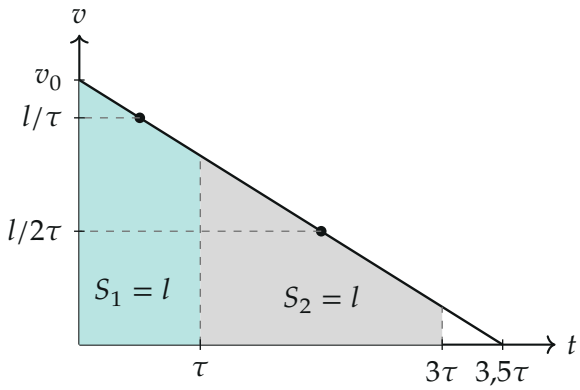
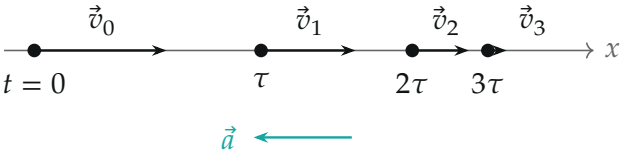


График $v(t)$: прямая с отрицательным наклоном. Путь — площадь под графиком: бирюзовая трапеция S_1 за время τ и серая S_2 за время от τ до 3τ равны l. Точки на прямой — скорости в серединах промежутков, $\frac{\tau}{2}$ и 2τ

Проверка. Размерность: l/τ — скорость, l/τ^2 — ускорение. Подстановка в закон движения: $x(\tau) = \dfrac{7l}{6} - \dfrac{l}{6} = l$ и $x(3\tau) = \dfrac{7l}{2} - \dfrac{3l}{2} = 2l$. Ещё одно условие: тело не должно остановиться раньше, чем дойдёт до второй отметки, иначе оно вернулось бы. Остановка наступает при $v = v_0 + a_x t = 0$, то есть $t = \dfrac{v_0}{|a_x|} = \dfrac{7\tau}{2} = 3{,}5\tau$ — после момента 3τ, так что условие выполнено.



Движение через равные промежутки τ: положения 0, l, $\frac{5}{3}l$, $2l$ (расстояния между ними убывают), скорости $\frac{7}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ в единицах l/τ (длины стрелок в масштабе). Ускорение $\vec{a}$ постоянно и направлено против скорости

Физический смысл: ускорение $l/(3\tau^2)$ мало — за время τ скорость падает лишь на $l/(3\tau)$, то есть на треть от «скорости прохождения» l/τ первого участка, и тело всё равно успевает дойти до второй отметки.

Ответ. $v_0 = \dfrac{7l}{6\tau}$, $a = \dfrac{l}{3\tau^2}$; ускорение направлено против начальной скорости.