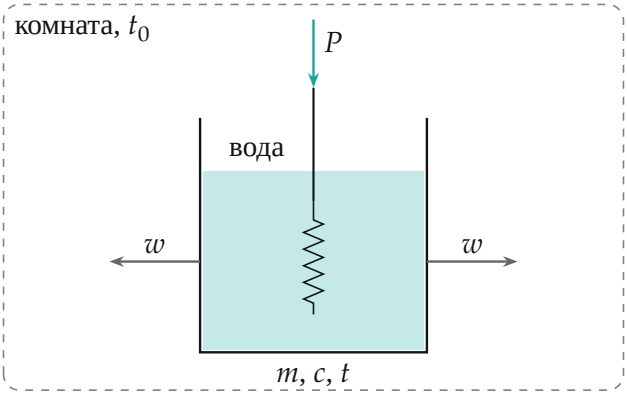
Нагреватель и охлаждение воды

Задача 5. [Росатом 2024/25, отборочный этап, 9 класс, задача 5] «Нагреватель и охлаждение воды».

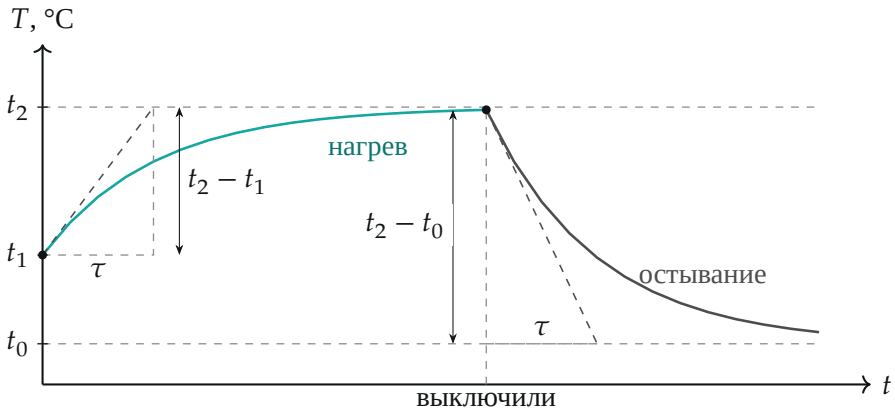
В находящийся в комнате сосуд налили воду с температурой t_1 °C и опустили работающий нагреватель. В результате температура воды стала расти со скоростью v °C/с. Постепенно скорость возрастания температуры стала уменьшаться, и вода нагрелась только до температуры t_2 °C. Нагреватель выключили, и температура стала убывать со скоростью $1{,}6\,v$. Определить температуру воздуха в комнате. Во сколько раз нужно увеличить мощность нагревателя, чтобы довести воду до кипения. Указание. Тепловой поток между телами пропорционален разности их температур (закон Ньютона–Рихмана) с коэффициентом пропорциональности, зависящим от площади контакта, теплоизоляции и др.



Поясняющий рисунок (в оригинале условия рисунка нет): нагреватель отдаёт воде мощность P, вода теряет в комнату мощность $w = k\,(t - t_0)$. Числа t_1, v, t_2 в напечатанном тексте организаторов не отобразились (пустые места); из их решения известно лишь, что после выключения вода остывает со скоростью $1{,}6\,v$, а ответы — $t_0 = 11\,^\circ C$ и 1,4 раза. Решаем в буквах — формулы от чисел не зависят; для рисунков и проверки взяты восстановленные $t_1 = 35\,^\circ C$ и $t_2 = 75\,^\circ C$ (почему именно они — в «Проверке»)

▲ **Решение. Что происходит.** Вода получает от нагревателя мощность P и одновременно отдаёт тепло комнате: тем больше, чем горячее вода (закон Ньютона–Рихмана, мощность потерь $w = k(t - t_0)$). Сначала потери малы и вода греется быстро; по мере нагрева потери растут, пока не сравняются с мощностью нагревателя — температура перестаёт расти (это t_2). Выключим нагреватель — останутся одни потери, вода остывает. Главная идея: для воды в трёх режимах (нагрев, предельная температура, остывание) записываем баланс мощностей; неизвестные k, P и теплоёмкость воды cm входят одним и тем же образом и исчезают при делении.

Обозначения. t_0 — температура воздуха в комнате (искомая), t — температура воды в рассматриваемый момент, c и m — удельная теплоёмкость и масса воды, P — мощность нагревателя, k — коэффициент пропорциональности в законе Ньютона–Рихмана (одинаковый во всех режимах), $v = \Delta T/\Delta t$ — скорость роста температуры воды. Теплоёмкостью сосуда и нагревателя пренебрегаем.



Температура воды со временем (в масштабе; $\tau = cm/k$ — единица времени): бирюзовая — нагрев от t_1 к t_2, серая — остывание к t_0 после выключения. Штриховые касательные в начале участков отсекают на асимптоте промежуток τ: наклон при нагреве $v = (t_2 - t_1)/\tau$, при остывании $(t_2 - t_0)/\tau$

1. Начало нагрева (температура t_1). За малое время Δt нагреватель выделяет теплоту $P\Delta t$. Она частично идёт на нагрев воды, $cm\Delta T$, а частично уходит в комнату, $w\Delta t = k(t_1 - t_0)\Delta t$. Закон сохранения энергии

для воды:

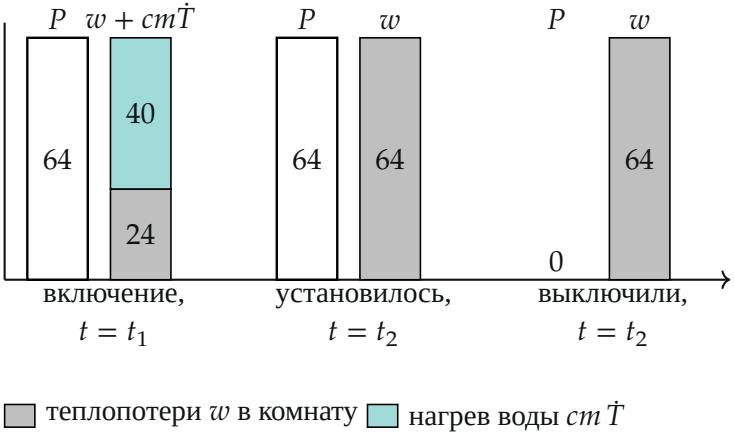
$$P\,\Delta t = cm\,\Delta T + k\,(t_1 - t_0)\,\Delta t \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{P - k(t_1 - t_0)}{cm}. \qquad (1)$$

2. Предельная температура t_2. Когда вода нагрелась до t_2 и перестала нагреваться, вся мощность нагревателя уходит в комнату:

$$P = k\,(t_2 - t_0). \qquad (2)$$

3. Остывание после выключения. Нагреватель выключен, $P = 0$; вода теряет мощность $k(t_2 - t_0)$ (в момент выключения её температура t_2) за счёт своей внутренней энергии, $cm \cdot 1{,}6v$:

$$1{,}6\,v = \frac{k\,(t_2 - t_0)}{cm}. \qquad (3)$$



Куда уходит мощность в трёх режимах (в единицах $k \cdot 1\,^\circ C$, $t_0 = 11$, $t_1 = 35$, $t_2 = 75$): сразу после включения $P = 64$ делится на потери 24 и нагрев воды 40; при t_2 все 64 идут в потери; после выключения потери 64 покрываются остыванием воды: $cm \cdot 1{,}6v = 64$

4. Температура воздуха. Подставим P из (2) в (1): $P - k(t_1 - t_0) =$

$k(t_2 - t_0) - k(t_1 - t_0) = k(t_2 - t_1)$, поэтому

$$v = \frac{k\,(t_2 - t_1)}{cm}.$$

Разделим это равенство на (3). Неизвестные k и cm сокращаются:

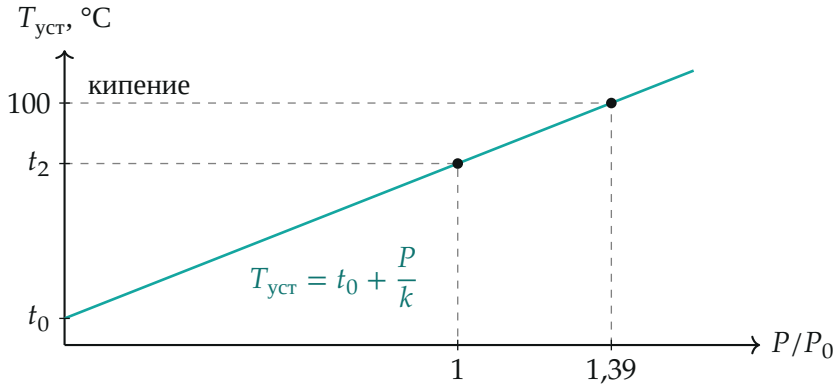
$$\frac{v}{1{,}6\,v} = \frac{5}{8} = \frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_0} \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0} = \frac{5}{8}.$$

Решаем относительно t_0: $5(t_2 - t_0) = 8(t_2 - t_1)$, откуда

$$t_0 = \frac{8t_1 - 3t_2}{5} = \frac{8 \cdot 35 - 3 \cdot 75}{5}\,^\circ\text{C} = 11\,^\circ\text{C}.$$

5. Мощность для кипения. Чтобы нагреть воду до кипения $t_{\text{кип}} = 100\,^\circ\text{C}$, нужна такая мощность P_1, при которой потери при этой температуре сравняются с мощностью (так же, как (2)): $P_1 = k(t_{\text{кип}} - t_0)$. Делим на (2):

$$\frac{P_1}{P} = \frac{t_{\text{кип}} - t_0}{t_2 - t_0} = \frac{100 - 11}{75 - 11} = \frac{89}{64} \approx 1{,}4.$$



Предельная температура $T_{уст} = t_0 + P/k$ как функция мощности. При нашей мощности P_0 (точка 1) она равна 75 °C; кипение достигается при $P_1 \approx 1{,}4\,P_0$

Обратите внимание: скорость остывания $1{,}6v$ относится к моменту выключения, когда вода имеет температуру t_2, а не t_1. Поэтому в (3) стоит разность $t_2 - t_0$.

Проверка. Размерность: t_0 — температура, P_1/P — безразмерное число. Откуда взяты числа 35 и 75. Из $t_0 = 11$ и $t_0 = (8t_1 - 3t_2)/5$ следует $8t_1 - 3t_2 = 55$; кроме того, ответ «1,4 раза» даёт $(100-11)/(t_2-11) \approx 1{,}4$, то есть t_2 лежит между 73 и 77 °C. Целые решения уравнения имеют вид $t_2 = 8n + 3$, и в этом промежутке подходит только $t_2 = 75$, тогда $t_1 = 35$ (при $t_2 = 67$ или 83 ответ был бы 1,6 или 1,2). Само решение и формулы ответа от этого выбора не зависят. Согласованность данных: из $v = k(t_2 - t_1)/cm$ и (3) получаем $(t_2 - t_0)/(t_2 - t_1) = 1{,}6$, при $t_0 = 11$ это $64/40 = 1{,}6$ — верно. Комната (11 °C) холоднее обеих температур воды (35 и 75 °C), поэтому вода действительно теряет тепло, как и предполагалось в (1)–(3). Второй способ — численное решение уравнения баланса $cm\dot{T} = P - k(T - t_0)$ (метод Эйлера на python, $t_0 = 11$, $P = 64k$, $cm = 80k$ с): начальная скорость 0,5 °C/с, температура приходит к 75 °C, после выключения скорость остывания 0,8 °C/с — ровно 1,6 от начальной; при $P_1 = 89k$ вода приходит к 100 °C. Предел: $P \to 0$ даёт $T_{\text{уст}} \to t_0$ — без нагревателя вода остывает до комнатной.

Физический смысл: вода остывает до комнатной, а нагреватель удерживает её выше комнатной ровно на P/k градусов; чтобы достичь 100 °C, надо поднять мощность примерно на 40 %.

Ответ. $t_0 = \dfrac{8t_1 - 3t_2}{5} = 11\,^\circ\text{C}$; мощность нужно увеличить в $\dfrac{t_{\text{кип}} - t_0}{t_2 - t_0} = \dfrac{89}{64} \approx 1{,}4$ раза.