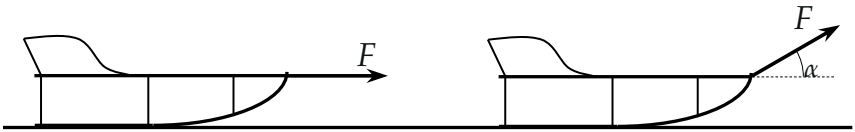
Санки и сила под углом

Задача 1. [Росатом 2024/25, 10 класс, задача 1] «Санки и сила под углом».

К санкам, свободно стоящим на горизонтальной шероховатой поверхности, сначала прикладывают горизонтальную силу, а затем — такую же по величине силу, но направленную под углом α к горизонту. При этом оказалось, что ускорение санок в двух этих случаях является одинаковым. Определить коэффициент трения между санками и снегом.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача класса «второй закон Ньютона с трением скольжения». Наклонённая сила тянет вперёд слабее ($F\cos\alpha < F$), но зато приподнимает санки: прижимающая сила и трение уменьшаются. Два эффекта могут скомпенсировать друг друга — тогда ускорения одинаковы. Ключ: трение скольжения μN, где N зависит от вертикальной составляющей F.

Обозначения. m — масса санок, μ — коэффициент трения, a — ускорение; ось x — горизонтально по движению, ось y — вертикально вверх (вдоль N: тогда $F_{\text{тр}}$ попадает только в проекцию на x). Считаем, что в обоих случаях санки едут ($a > 0$) и не отрываются от снега ($F\sin\alpha < mg$).

1. Горизонтальная сила. На санки действуют $m\vec{g}$, $\vec{N}_1$, $\vec{F}$ и трение скольжения $\vec{F}_{\text{тр}1}$, направленное против движения (рис. 1, слева). Второй закон Ньютона для санок $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}1}$ в проекциях:

$$y:\ 0 = N_1 - mg \ \Rightarrow\ N_1 = mg; \qquad x:\ ma_1 = F - \mu N_1 = F - \mu mg.$$

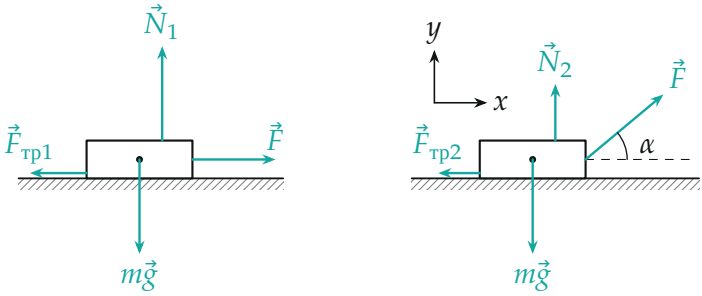


Рис. 1. Силы, действующие на санки (санки — брусок), при горизонтальной силе (слева) и силе под углом α (справа). Во втором случае $N_2 < N_1$, и трение меньше.

2. Сила под углом. Теперь у $\vec{F}$ есть вертикальная составляющая $F\sin\alpha$, направленная вверх (рис. 1, справа). Те же проекции:

$$y:\ 0 = N_2 + F\sin\alpha - mg \ \Rightarrow\ N_2 = mg - F\sin\alpha,$$

$$x:\ ma_2 = F\cos\alpha - \mu N_2 = F\cos\alpha - \mu mg + \mu F\sin\alpha.$$

Знак «плюс» у $\mu F\sin\alpha$: подъём санок уменьшает трение и тем самым «помогает» тянуть.

3. Равенство ускорений. Приравниваем $ma_1 = ma_2$; μmg сокращается, и масса санок не понадобилась:

$$F = F\cos\alpha + \mu F\sin\alpha \ \Rightarrow\ \mu\sin\alpha = 1 - \cos\alpha \ \Rightarrow\ \mu = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

По формулам половинного угла $1-\cos\alpha = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$, $\sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$:

$$\mu = \frac{2\sin^2(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

4. Второй способ: «тяговая» функция угла. Ускорение при угле β равно $a(\beta) = \dfrac{F}{m}f(\beta) - \mu g$, где

$$f(\beta) = \cos\beta + \mu\sin\beta = \sqrt{1+\mu^2}\,\cos(\beta-\varphi), \qquad \operatorname{tg}\varphi = \mu.$$

Это косинусоида с максимумом при $\beta = \varphi$ — угле трения (рис. 2). Она симметрична относительно максимума, поэтому одинаковые значения $f(0) = f(\alpha)$ возможны только при $\alpha = 2\varphi$, то есть $\mu = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha/2)$ — тот же ответ. Заодно видно: при любом угле между 0 и α санки разгонялись бы быстрее, а самый выгодный угол тяги — ровно половина α.

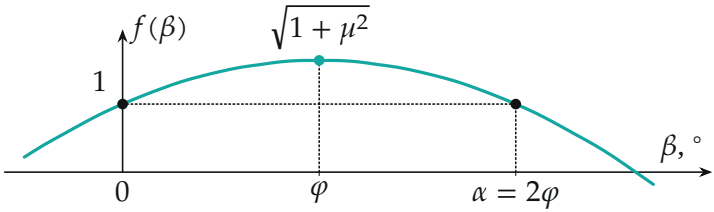


Рис. 2. Функция $f(\beta) = \cos\beta + \mu\sin\beta$ (построено для $\mu = \operatorname{tg}20° = 0{,}36$). Одинаковые значения при $\beta = 0$ и $\beta = \alpha$ — точки, симметричные относительно максимума $\beta = \varphi$.

Обратите внимание: нормальная реакция во втором случае не равна mg — частая ошибка взять трение μmg в обоих случаях; тогда ускорения никогда не совпали бы.

Проверка. Размерность: μ безразмерен, $\operatorname{tg}(\alpha/2)$ — тоже. Малый угол: выигрыш в трении $\mu F\sin\alpha \approx \mu F\alpha$, потеря тяги $F(1-\cos\alpha) \approx F\alpha^2/2$; они равны при $\mu = \alpha/2$, что совпадает с $\operatorname{tg}(\alpha/2) \approx \alpha/2$. Пример: при $\alpha = 40°$ $\mu = \operatorname{tg}20° = 0{,}36$; $\cos 40° + 0{,}364\sin 40° = 0{,}766 + 0{,}234 = 1{,}000$ — верно.

Смысл: если тянуть под углом трения φ, санки разгоняются быстрее всего; углы 0 и 2φ дают одинаковый результат.

Ответ. $\mu = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.