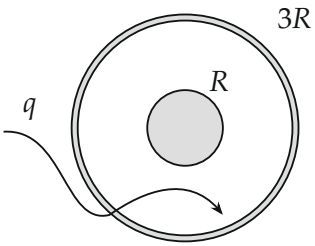
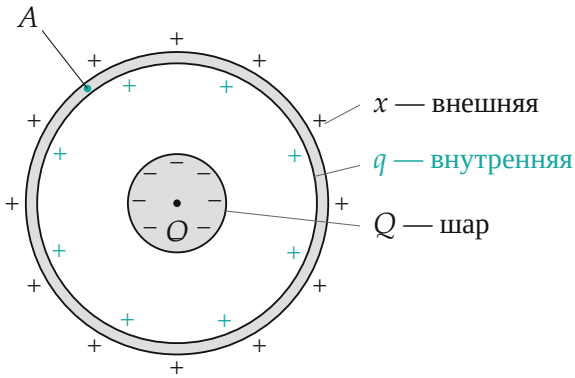
Шар в проводящей сфере

Задача 3. [Росатом 2024/25, заключительный этап, 10 класс, задача 3] Металлический шар радиуса R окружён тонкостенной металлической сферой радиуса $3R$, концентрической с шаром (см. рисунок). Известно, что на внутренней поверхности сферы будет индуцирован положительный заряд q ($q > 0$), а потенциал шара вдвое меньше потенциала сферы. Найти заряд, индуцированный на внешней поверхности сферы. Является ли заряженным металлический шар и если да, то каков его заряд?



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на проводники в электростатике. Внутри металла поля нет, а заряды проводника сидят на его поверхностях. Заряд q на внутренней поверхности сферы появился не сам по себе: его «притянул» заряд шара. Поэтому сначала из условия «поле в толще сферы равно нулю» найдём заряд шара, а потом из условия на потенциалы — заряд внешней поверхности.

Обозначения. Q — заряд шара, q — заряд внутренней поверхности сферы, x — заряд внешней поверхности сферы, $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$. Точка A — произвольная точка внутри металла сферы (на расстоянии r от центра, $r \approx 3R$), точка O — центр.



Три заряда системы: шар Q и две поверхности сферы q и x; точка A — в толще металла сферы

1. Заряд шара. Применим принцип суперпозиции к напряжённости поля в точке A внутри металла сферы. Там поле равно нулю: иначе свободные электроны металла двигались бы, а заряды неподвижны. Поле в A складывается из трёх полей:

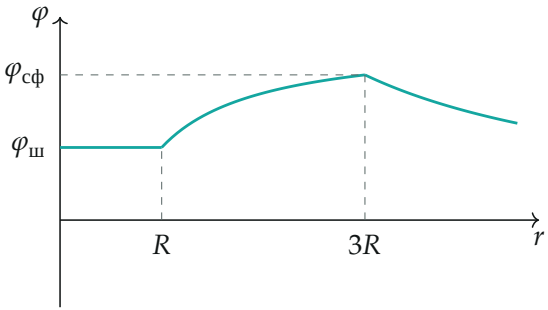
- внешняя поверхность (равномерно заряженная сфера) внутри себя поля не создаёт: A лежит внутри неё;
- шар и внутренняя поверхность — снаружи от A они действуют как точечные заряды в центре O.

Проекция напряжённости на радиальное направление в точке A:

$$E_A = \frac{k(Q+q)}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = -q.$$

Значит, шар заряжен, и его заряд $Q = -q$ отрицателен. Если бы шар был не заряжен, на внутренней поверхности сферы ничего бы не индуцировалось.

2. Потенциал шара и потенциал сферы. Потенциал равномерно заряженной сферы радиуса ρ с зарядом Q_1 равен kQ_1/ρ внутри неё и kQ_1/r снаружи на расстоянии r от центра. Потенциал — скаляр, потенциалы от трёх зарядов складываются.



Потенциал вдоль радиуса (по найденному ответу): на шаре $\varphi_ш$, между шаром и сферой он растёт, на сфере $\varphi_{сф} = 2\varphi_ш$

Шар находится внутри обеих поверхностей сферы:

$$\varphi_ш = \frac{kQ}{R} + \frac{kq}{3R} + \frac{kx}{3R} = -\frac{kq}{R} + \frac{kq}{3R} + \frac{kx}{3R} = \frac{k(x-2q)}{3R}.$$

Сфера находится снаружи шара и на расстоянии $3R$ от центра:

$$\varphi_{сф} = \frac{kQ}{3R} + \frac{kq}{3R} + \frac{kx}{3R} = \frac{kx}{3R}.$$

Заряды шара и внутренней поверхности в сумме дают нуль, поэтому снаружи сферы «работает» только x.

3. Условие на потенциалы. По условию $\varphi_{сф} = 2\varphi_ш$:

$$\frac{kx}{3R} = \frac{2k(x-2q)}{3R} \quad \Rightarrow \quad x = 2x - 4q \quad \Rightarrow \quad x = 4q.$$

Обратите внимание: потенциал шара не равен kQ/R — в него входят и заряды сферы, хотя внутри сферы они поля не создают. Поле от внешней поверхности внутри нуль, а потенциал — постоянный и ненулевой.

Ответ.

$$x = 4q, \qquad Q = -q.$$

Проверка. Размерность: x и Q — заряды, выражены через заряд q. Подстановка: $\varphi_ш = k(4q-2q)/(3R) = 2kq/(3R)$, $\varphi_{сф} = 4kq/(3R)$ — ровно вдвое больше. Знак: поле между шаром и сферой направлено к

шару (шар заряжен отрицательно), а потенциал падает по направлению поля, поэтому $\varphi_{\text{ш}} < \varphi_{\text{сф}}$, как и в условии. Полный заряд сферы $q + x = 5q$, всей системы $4q$.

Ответ. На внешней поверхности сферы заряд $4q$; шар заряжен, его заряд $-q$.