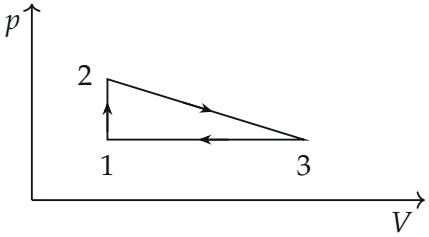
Цикл с линейным участком

Задача 4. [Росатом 2024/25, заключительный этап, 10 класс, задача 4] С ν молями идеального газа проводят циклический процесс 1-2-3-1, состоящий из: (а) изохорического нагревания 1-2, (б) участка 2-3 с линейной зависимостью давления от объёма, (в) изобарического сжатия 1-3 (см. рисунок). Известно, что отношение максимального и минимального объёмов газа в течение цикла равно 3, отношение максимального и минимального давлений газа в течение цикла равно 2, максимальная разность температур в течение всего цикла — ΔT. Найти работу газа за цикл.

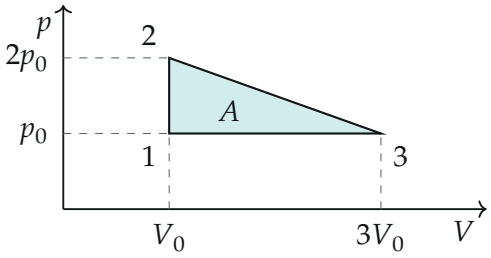


▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на работу газа в цикле. Работа за цикл — площадь цикла на диаграмме p–V, здесь это площадь прямоугольного треугольника, и она выражается через p_0V_0 (давление и объём в точке 1). Неизвестное p_0V_0 найдём из второго условия: максимальная разность температур — это $T_{\max} - T_{\min}$, а температура по уравнению Менделеева–Клапейрона пропорциональна pV. Тонкое место — где на цикле самая высокая температура: не в вершине 2 или 3, а внутри отрезка 2-3.

Обозначения. p_0, V_0 — давление и объём в состоянии 1, $T_0 = p_0V_0/(\nu R)$ — температура в состоянии 1, R — газовая постоянная.

1. Параметры вершин. На изохоре 1-2 объём не меняется, на изобаре 1-3 не меняется давление. Минимальный объём — у отрезка 1-2 (левая сторона), минимальное давление — у отрезка 1-3 (нижняя сторона). Поэтому:

$$1:\ (V_0,\ p_0), \qquad 2:\ (V_0,\ 2p_0), \qquad 3:\ (3V_0,\ p_0).$$



Цикл в осях p–V: катеты треугольника $2V_0$ и p_0, площадь A — работа за цикл

2. Работа за цикл. Цикл обходится по часовой стрелке (1-2-3 — вверх, вправо-вниз, влево), поэтому работа газа за цикл положительна и равна площади треугольника:

$$A = \frac{1}{2} \cdot (3V_0 - V_0) \cdot (2p_0 - p_0) = p_0 V_0.$$

3. Минимальная температура. Уравнение Менделеева–Клапейрона $pV = \nu RT$ даёт $T = pV/(\nu R)$. Во всех точках цикла $p \geqslant p_0$ и $V \geqslant V_0$, причём оба равенства выполняются только в точке 1. Значит,

$$T_{\min} = T_1 = \frac{p_0 V_0}{\nu R} = T_0.$$

4. Максимальная температура. На изохоре 1-2 и на изобаре 1-3 температура растёт монотонно от точки 1 к точкам 2 и 3: $T_2 = 2T_0$, $T_3 = 3T_0$. На отрезке 2-3 давление падает, а объём растёт, и произведение pV может иметь максимум внутри отрезка. Запишем уравнение прямой 2-3 через две её точки $(V_0,\, 2p_0)$ и $(3V_0,\, p_0)$:

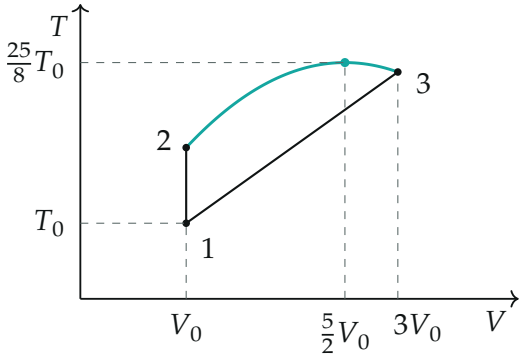
$$p(V) = 2p_0 - \frac{p_0}{2V_0}(V - V_0) = \frac{p_0}{2}\left(5 - \frac{V}{V_0}\right).$$

Подставим в $T = pV/(\nu R)$:

$$T(V) = \frac{p_0 V}{2\nu R}\left(5 - \frac{V}{V_0}\right) = \frac{T_0}{2}\,\frac{V}{V_0}\left(5 - \frac{V}{V_0}\right).$$

Это парабола ветвями вниз с нулями при $V = 0$ и $V = 5V_0$; вершина посередине, при $V^* = \frac{5}{2}V_0$. Эта точка лежит внутри отрезка $[V_0;\, 3V_0]$, поэтому максимум на прямой достигается в ней:

$$T_{\max} = \frac{T_0}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{8}\,T_0 > T_3 = 3T_0.$$



Температура вдоль цикла: на 2-3 (бирюза) — парабола с вершиной при $V = \frac{5}{2}V_0$, она выше точки 3

5. Связь с ΔT. Максимальная разность температур за цикл:

$$\Delta T = T_{\max} - T_{\min} = \frac{25}{8}T_0 - T_0 = \frac{17}{8}\,T_0 = \frac{17}{8}\,\frac{p_0V_0}{\nu R},$$

откуда

$$p_0V_0 = \frac{8}{17}\,\nu R\,\Delta T.$$

Обратите внимание: если взять максимум температуры в вершине 3 ($3T_0$), получится $\Delta T = 2T_0$ и неверный ответ $A = \nu R\Delta T/2$. Вершина не обязана быть самой горячей точкой отрезка 2-3.

Ответ.

$$A = p_0V_0 = \frac{8}{17}\,\nu R\,\Delta T.$$

Проверка. Размерность: $[\nu R\,\Delta T] = \text{моль} \cdot \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}} \cdot \text{К} = \text{Дж}$. Второй способ найти максимум pV на отрезке 2-3: произведение $p \cdot V$ при постоянной сумме $\frac{2V_0}{p_0}\,p + V = 5V_0$ максимально, когда слагаемые равны,

$V = \frac{5}{2}V_0$, $p = \frac{5}{4}p_0$, и $pV = \frac{25}{8}p_0V_0$ — то же. Численно (перебором точек отрезка) максимум $pV/(p_0V_0) = 3{,}125$.

Ответ. $A = \dfrac{8}{17}\,\nu R\,\Delta T$.