Кольцо на нити через блок

Задача 2. [Росатом 2024/25, заключительный этап, 11 класс, задача 2] Через невесомый блок, прикреплённый к потолку, перекинута невесомая и нерастяжимая нить. К одному концу нити прикреплён груз некоторой массы M. На второй конец нити с натягом надето кольцо массой m, благодаря чему между кольцом и нитью действует сила трения, максимальное значение которой равно $1{,}1\,mg$.

1. В каких пределах должна лежать масса M груза, чтобы кольцо не скользило по нити?
2. Какой должна быть максимальная сила трения между кольцом и нитью, чтобы проскальзывание не возникало ни при каких значениях M?

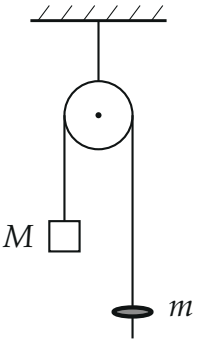


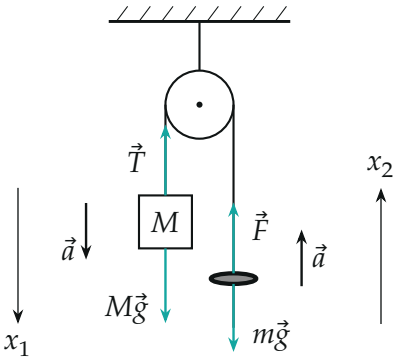
Рисунок к условию: груз M на одном конце нити, кольцо m с трением надето на другой

▲ **Решение. Что происходит.** Нить невесома, поэтому сила натяжения T вдоль неё одна и та же во всех точках, а блок невесом, поэтому она одинакова и по обе стороны блока. Кольцо держится на нити только силой трения; невесомый кусочек нити внутри кольца находится в равновесии (сумма сил на него равна нулю), поэтому сила трения между кольцом и нитью равна T. Пока $T \le 1{,}1\,mg$, это трение покоя справляется, кольцо не скользит, и груз с кольцом движутся как два тела на нити, перекинутой через блок. Класс задачи: связанные тела и трение покоя, действуем

по шаблону «предположение (скольжения нет) → проверка (хватает ли трения)».

Обозначения. T — сила натяжения нити; F — сила трения, действующая на кольцо со стороны нити; $F_{\max} = 1{,}1\,mg$; a — ускорение груза и кольца (модуль общий, пока кольцо не скользит). Ось x_1 для груза направим вниз, ось x_2 для кольца — вверх: при движении груза вниз кольцо идёт вверх, и проекции ускорений на эти оси одинаковы.

1. Предположим, что кольцо не скользит. Тогда нить нерастяжима и кольцо неподвижно относительно неё, поэтому груз и кольцо имеют одинаковые по модулю ускорения. Сила трения, действующая на кольцо, равна $F = T$: для невесомого кусочка нити внутри кольца сумма сил (натяжение T и трение со стороны кольца) равна нулю. Значит, условие «скольжения нет» — это $T \le F_{\max} = 1{,}1\,mg$.



Силы на груз и на кольцо (для примера $M = 1{,}1\,m$: $T = \frac{22}{21}mg \approx 1{,}05\,mg < 1{,}1\,mg$, скольжения нет): груз опускается, кольцо поднимается с тем же ускорением a

2. Второй закон Ньютона для груза в проекции на ось x_1 (вниз; на груз действуют $M\vec{g}$ вниз и $\vec{T}$ вверх) и для кольца в проекции на ось x_2 (вверх; на кольцо действуют $\vec{T}$ как сила трения вверх и $m\vec{g}$ вниз):

$$Ma = Mg - T, \qquad ma = T - mg.$$

Оси выбраны так, что у обоих тел ускорение имеет одну и ту же проек-

цию a. Сложим уравнения: $(M+m)a = (M-m)g$, откуда

$$a = \frac{M-m}{M+m}\,g, \qquad T = m(g+a) = \frac{2mM}{M+m}\,g.$$

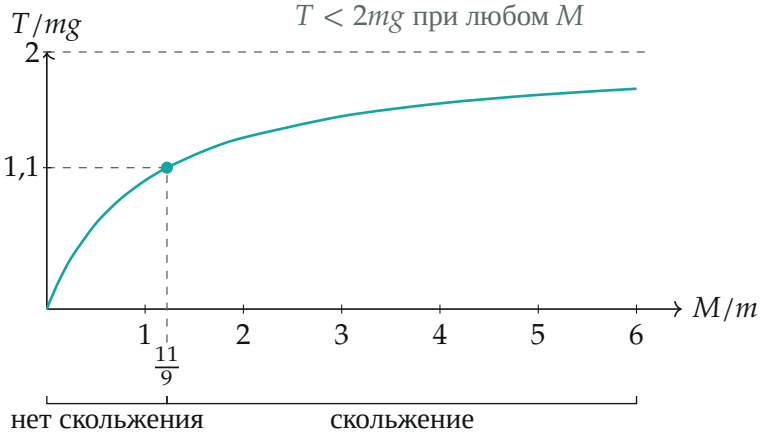
Знак a словами: при $M > m$ груз опускается и кольцо поднимается ($a > 0$), при $M < m$ всё наоборот ($a < 0$), при $M = m$ система покоится.

3. Условие отсутствия скольжения. Потребуем $T \le 1{,}1\,mg$ (применимо, пока скольжения нет, то есть как раз при выполнении этого неравенства):

$$\frac{2mM}{M+m}\,g \le 1{,}1\,mg \quad \Rightarrow \quad 2M \le 1{,}1\,(M+m) \quad \Rightarrow \quad 0{,}9\,M \le 1{,}1\,m,$$

$$M \le \frac{11}{9}\,m \approx 1{,}2\,m.$$

Нить натянута при любом $M > 0$, и натяжение $T = 2mg/(1 + m/M)$ растёт с ростом M: чем тяжелее груз, тем сильнее он тянет кольцо вверх по нити и тем больше нужна сила трения. Поэтому нижней границы нет (при $M \to 0$ натяжение стремится к нулю), а верхняя — $\frac{11}{9}m$.



Натяжение нити T как функция M/m в режиме без скольжения: пересекает уровень $1{,}1\,mg$ при $M = \frac{11}{9}m$ и никогда не достигает $2mg$

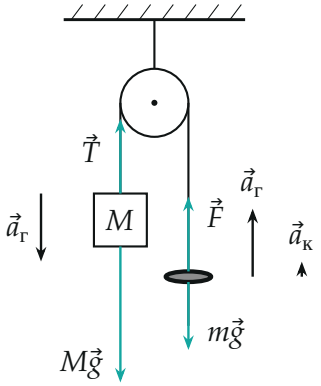
4. Второй вопрос. Из $T = \dfrac{2M}{M+m}\,mg$ видно, что $T < 2mg$ при любом конечном M, а при $M \to \infty$ (почти свободное падение груза: кольцо уходит вверх с ускорением $a \to g$, $T = m(g+g))$ $T \to 2mg$. Значит, скольжения не будет ни при каких M, если максимальная сила трения $F_{\max} \geq 2mg$: ровно $2mg$ тоже годится, потому что строго $T < 2mg$.

О границах и ответе организаторов. У организаторов верхняя граница записана как $1{,}2\,m$, а во втором вопросе — «больше $2mg$». Число 1,2 — округление точного $\frac{1{,}1}{0{,}9} = \frac{11}{9} \approx 1{,}22$; брать $1{,}2m$ как точную границу нельзя (например, при $M = 1{,}21\,m$ скольжения ещё нет). Граница $M = \frac{11}{9}m$ включается: там трение покоя ровно равно своему максимуму, и кольцо ещё не скользит (обычное соглашение $F \leq F_{\max}$). Во втором вопросе нестрогое $F_{\max} \geq 2mg$ точнее строгого «больше»: натяжение $2mg$ только предел при $M \to \infty$ и не достигается. По сути ответы совпадают.

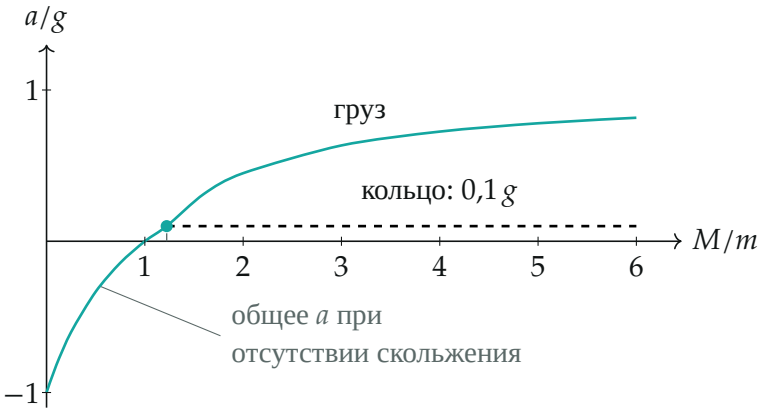
Второй способ — от обратного: пусть $M > \frac{11}{9}m$ и кольцо скользит. Трение тогда имеет максимальное значение, $T = F_{\max} = 1{,}1\,mg$, и ускорения тел разные. Для кольца вверх: $ma_{\text{к}} = 1{,}1\,mg - mg$, откуда $a_{\text{к}} = 0{,}1\,g$. Для груза вниз: $Ma_{\text{г}} = Mg - 1{,}1\,mg$, откуда $a_{\text{г}} = g\,(1 - 1{,}1\,m/M)$; с такой же скоростью нить уходит вверх на стороне кольца. Кольцо скользит вниз по нити, как и предполагалось (трение на него направлено вверх), только если нить уходит вверх быстрее кольца, то есть $a_{\text{г}} > a_{\text{к}}$:

$$1 - \frac{1{,}1\,m}{M} > 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad M > \frac{11}{9}\,m,$$

и предположение согласуется с условием: ровно при $M = \frac{11}{9}m$ оба ускорения равны $0{,}1\,g$ — граница режимов.



Режим скольжения ($M = 2m$): $T = F = 1{,}1\,mg$; нить на стороне кольца идёт вверх с ускорением груза $a_г = 0{,}45\,g$, кольцо — только с $a_к = 0{,}1\,g$



Ускорения (положительные: груз вниз, кольцо вверх): до $M = \frac{11}{9}m$ общие, потом у кольца постоянное $0{,}1\,g$, у груза продолжает расти

Обратите внимание: сила трения не равна $1{,}1\,mg$ всё время — это только её максимум. Пока скольжения нет, она равна T и меняется вместе с M; именно поэтому нужно сравнивать T с $1{,}1\,mg$, а не подставлять $1{,}1\,mg$ в уравнения. И натяжение не равно ни Mg, ни mg: тела движутся с ускорением.

Проверка. Размерность: T — сила. Предельные случаи: $M = m$ даёт $a = 0$ и $T = mg$ (равновесие, трение $mg < 1{,}1\,mg$ — скольжения нет);

$M \to 0$ даёт $T \to 0$; $M \to \infty$ даёт $T \to 2mg$. На границе $M = \frac{11}{9}m$: $T = \dfrac{2 \cdot \frac{11}{9}}{\frac{20}{9}} mg = 1{,}1\, mg$, $a = \dfrac{2/9}{20/9} g = 0{,}1\, g$ — совпадает со вторым способом. Смысл: чем тяжелее груз, тем сильнее натянута нить, и кольцо удержать труднее; но даже бесконечно тяжёлый груз не может создать натяжение больше $2mg$, потому что тогда кольцо поднимается с ускорением, близким к g, и ему нужна сила $m(g + a) \to 2mg$.

Ответ. 1) $0 < M \le \dfrac{11}{9}\, m \approx 1{,}2\, m$; 2) максимальная сила трения должна быть не меньше $2mg$ (любое значение больше $2mg$ подходит).