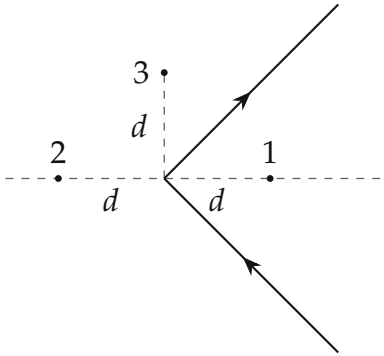
Магнитное поле изогнутого провода

Задача 3. [Росатом 2024/25, заключительный этап, 11 класс, задача 3] Бесконечный провод, по которому течёт электрический ток, изогнут под прямым углом. Индукция магнитного поля провода в точке 1, лежащей на биссектрисе угла, образованного проводом, на расстоянии d от вершины равна B_1. Индукция магнитного поля провода в точке 2, лежащей на продолжении биссектрисы угла, образованного проводом, на расстоянии d от вершины, равна B_2. Найти индукцию магнитного поля провода в точке 3, лежащей на перпендикуляре к биссектрисе угла, образованного проводом, на расстоянии d от вершины (см. рисунок).



▲ **Решение.** **Что происходит.** Ток в условии не задан, и выражать поля через ток не нужно: во всех трёх точках индукция пропорциональна одному и тому же току I, поэтому достаточно связать B_1, B_2 и B_3 друг с другом. Главная идея — принцип суперпозиции: поле всего провода есть сумма полей его кусков, а кусков нужно взять так, чтобы они повторялись от точки к точке. Это задача о суперпозиции полей кусков проводов; симметрия подсказывает, что кусков будет всего два вида.

Обозначения. O — вершина угла; $h = d/\sqrt{2}$; b_1 — индукция полубесконечного провода с током I в точке, лежащей на перпендикуляре к проводу, проведённом через его конец, на расстоянии h от провода; b_2 — индукция в такой же точке (на расстоянии h от провода, напротив одного из концов) отрезка того же провода длиной h.



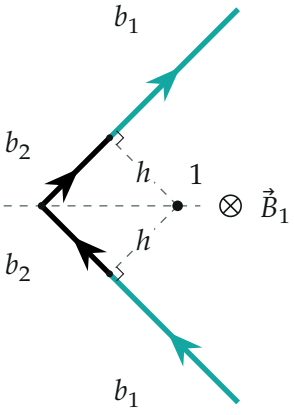
Два «кирпичика»: полубесконечный провод (b_1) и отрезок длиной h (b_2); обе точки X стоят над концом на расстоянии h

1. Кирпичики. Опустим из каждой из точек 1, 2, 3 перпендикуляры на прямые, содержащие стороны угла. Биссектриса и перпендикуляр к ней образуют со сторонами прямого угла по 45°, поэтому для любой из трёх точек (она на расстоянии d от вершины) расстояние до каждой стороны равно $d\sin 45^\circ = h$, а основание перпендикуляра отстоит от вершины на $d\cos 45^\circ = h$. Значит, в каждой точке картина одна и та же: основание перпендикуляра делит прямую стороны на два куска — отрезок длиной h между основанием и вершиной (его поле b_2) и полубесконечную часть за основанием (поле b_1). Точка стоит напротив основания, на расстоянии h.

Направление поля находим по правилу правой руки: по стороне течёт ток в одну сторону, и оба куска одной прямой, лежащие по разные стороны основания, создают в точке поле одного направления. Поэтому, если основание лежит *на проводе*, поля кусков складываются: $b_1 + b_2$. Если основание лежит на продолжении стороны за вершиной, то настоящий провод — это полубесконечная прямая за основанием *без* отрезка между основанием и вершиной: поле равно $b_1 - b_2$ (достраиваем недостающий отрезок и вычитаем его поле).

2. Точка 1 лежит на биссектрисе. Основания перпендикуляров на обе стороны лежат на самих проводах (на расстоянии h от вершины). Каждая сторона даёт $b_1 + b_2$. Ток течёт по верхней стороне от вершины, по нижней — к вершине, а точка 1 лежит справа по ходу тока у верхней стороны и справа по ходу тока у нижней, поэтому оба поля направлены от нас (за чертёж) и складываются:

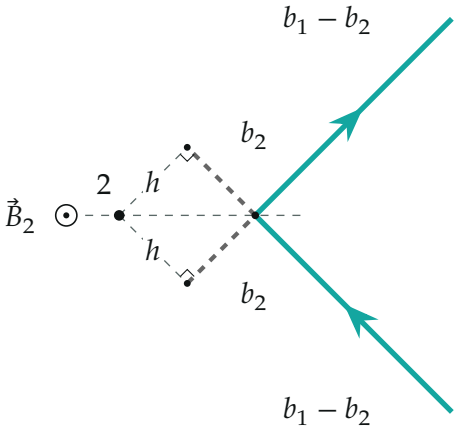
$$B_1 = 2(b_1 + b_2).$$



Точка 1: основания перпендикуляров лежат на обоих проводах, поля сторон складываются и направлены от нас

3. Точка 2 лежит на продолжении биссектрисы за вершину. Основания перпендикуляров на обе стороны лежат за вершиной, на продолжениях сторон. Каждая сторона даёт $b_1 - b_2$, и оба поля направлены к нам (точка 2 слева по ходу тока у верхней стороны и слева по ходу тока у нижней):

$$B_2 = 2(b_1 - b_2).$$

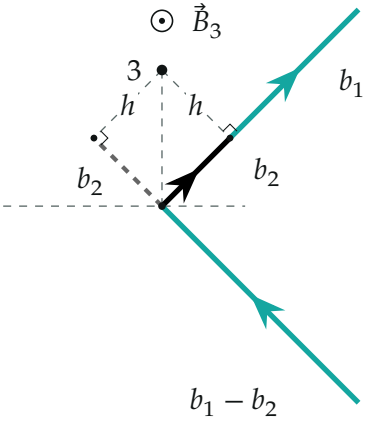


Точка 2: основания перпендикуляров лежат на продолжениях сторон за вершиной (пунктир), поля сторон вычитают поле достроенных отрезков

4. Точка 3 лежит на перпендикуляре к биссектрисе. У верхней стороны основание лежит на проводе, и она даёт $b_1 + b_2$ к нам (точка 3 слева по ходу тока). У нижней стороны основание лежит на продолжении за вершиной, поэтому она даёт $b_1 - b_2$, и направлено это поле от нас (точка 3 справа по ходу тока в нижней стороне). Поля противоположны и вычитаются:

$$B_3 = (b_1 + b_2) - (b_1 - b_2) = 2b_2,$$

поле $\vec{B}_3$ направлено к нам.



Точка 3: у верхней стороны основание лежит на проводе, у нижней — на продолжении за вершиной; поля сторон направлены в разные стороны

5. Связь с B_1 и B_2. Вычтем второе уравнение из первого: $B_1 - B_2 = 4b_2$, и $B_3 = 2b_2$, отсюда

$$B_3 = \frac{B_1 - B_2}{2}.$$

Обратите внимание: B_1 и B_2 здесь — модули индукции; направления у них противоположны ($\vec{B}_1$ от нас, $\vec{B}_2$ к нам), а $\vec{B}_3$ направлено так же, как $\vec{B}_2$.

Второй способ (проверка числами). Индукция отрезка прямого провода в точке на расстоянии r от прямой равна $\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)$, где $\varphi_{1,2}$ — углы от перпендикуляра до направлений на концы отрезка. Для

b_1: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 90°$; для b_2: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 45°$. Поэтому

$$b_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi h}, \qquad b_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi h} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{b_1}{\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$B_1 = 2b_1\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad B_2 = 2b_1\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad B_3 = \sqrt{2}\,b_1,$$

и

$$\frac{B_1 - B_2}{2} = \frac{4b_1/\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\,b_1 = B_3.$$

Проверка. Размерность: B_3 и $B_1 - B_2$ — индукции. Числовая проверка прямым суммированием по закону Био — Савара в единицах $\mu_0 I/(4\pi d)$ даёт $B_1 = 4{,}83$, $B_2 = 0{,}83$, $B_3 = 2{,}00$, и $(4{,}83 - 0{,}83)/2 = 2{,}00$; знаки: $\vec{B}_1$ от нас, $\vec{B}_2$ и $\vec{B}_3$ к нам. Смысл: поле в точке 3 равно половине разности полей на биссектрисе, потому что вклады полубесконечных частей в точке 3 взаимно сокращаются, и остаётся только вклад двух отрезков.

Ответ. $B_3 = \dfrac{B_1 - B_2}{2}$ (модуль; направление — к нам, то есть так же, как у $\vec{B}_2$ и противоположно $\vec{B}_1$, при токе, показанном на рисунке).